Семенюта Н.Ф.

ТОЖДЕСТВА КАССИНИ ОБОБЩЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Посвящается светлой памяти нашего товарища и друга Григория Яковлевича Мартыненко (14 февраля 1936, с. Акимовка Запорожской области УССР — 5 апреля 2019, Санкт-Петербург), доктора филологических наук, профессор кафедры математической лингвистики Филологического факультета Санкт-Петербургского государственного университета; исследователя золотого сечения и гармонических последовательностей чисел Фибоначчи, Люка и др., числовой гармонии текстов художественной литературы (романов, рассказов, сонет и др.), популяризатора и исполнителя, русских и украинских песен и романсов, лауреата Международных конкурсов русского романса.

Труды Г. Я. Мартынеко и монографии «История математико-гармонических представлений: от Пифагора до наших дней» (2016), «Методы математической лингвистики в стилистических исследованиях» (2019) и другие, являются значительными вкладами в историю математической теории гармонии и математической лингвистики. По инициативе и под редакцией Г. Я. Мартынеко в Санкт-Петербурском государственном университете выпущена серия авторских словарей выдающихся русских писателей.

Аннотация: Тождество Кассини – одно из замечательных свойств последовательностей рекуррентных чисел Фибоначчи и др. Его исследованиям посвящены работы многих авторов. В статье рассмотрены гиперболических функций и их взаимосвязи с тождествами последовательностей чисел Фибоначчи и Якобсталя. Из полученных результатов обратим внимание на впервые полученные рекуррентные последовательности гиперболических функций. Эти последовательности позволяют по-новому решить ряд задач математической теории гармонии в науке и технике и др.

Ключевые слова: Числа Фибоначчи, Люка, числа Пелля, числа Пелля-Люка, числа Якобсталя, числа Люка-Якобсталя, золотое сечение, гиперболические функции.

Содержание

Введение
1. Тождество Кассини последовательности чисел Фибоначчи
2. Тождество Кассини обобщенных последовательностей чисел Фибоначчи
3. Тождество Кассини последовательности чисел Якобсталя
4. Взаимосвязь последовательностей чисел Якобсталя и Фибоначчи
Заключение
Литература

Введение

Тождество Кассини – одно из замечательных свойств последовательностей рекуррентных чисел Фибоначчи и др. Тождество было установлено в 1680 году Джованни Кассини, бывшим в то время директором Парижской обсерватории и доказано Робертом Симсоном в 1753 году и обобщено в 1879 году Эжен Каталани [1].

Свойствам тождества Кассини посвящены многие работы современных исследователей числовых последовательностей, в которых рассмотрены как общие сведения о тождества, так и обобщения тождества для последовательности чисел Фибоначчи и Люка [2 – 5]. В работах Г. Я. Мартыненко приведены обобщения тождества Кассини для зеркальной симметрии чисел Фибоначчи и Люка [6, 7]. Связь тождества Кассини-Каталани с гиперболическими функциями рассмотрена в работе [8]. Аналогия основного уравнения передачи лестничных электрических цепей и тождества Кассини и установлена в работах [9, 10, 11]. Обратим внимание, что установление аналогии тождества и уравнения передачи электрических цепей произошло более чем через триста лет после появления тождества Кассини в 1680 г. Здесь можно выразить удивление столь запоздалому открытию. Такое запоздалое открытие аналогии можно объяснить только тем, что исследователи «золотого сечения» ничего не ведали о развивающейся новой науке того времени – электрической связи, где уже на начальном этапе было установлено фундаментальное условие теории гармонии электрических цепей – согласованость**,** основу которой составляет «золотое сечение» («золотая пропорция») В то же время исследователи электрической связи ничего не ведали о «золотом сечении». Поэтому такое открытие произошло только с появлением работ по электрическим моделям гармонических последовательностей чисел Фибоначчи, Люка и др. [12, 13, 14].

Настоящая статья посвящена анализу тождества Кассини последовательностей чисел Фибоначчи и его взаимосвязи с последовательностями обобщенных чисел Фибоначчи, взаимосвязи чисел Фибоначчи и Якобсталя и гиперболическими функциями.

1. Тождество Кассини последовательностей чисел Фибоначчи

Тождество Кассини является одним из свойств последовательностей чисел Фибоначчи

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots F_{-2} & F_{-1} & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \ldots, \\ \ldots -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21\ldots, \end{array} \qquad F_1 = F_2 = 1.$$

Суть тождества Кассини состоит в том, что разность квадрата n-го числа последовательности чисел F_n и произведения двух соседних чисел $F_{n-1}F_{n+1}$ в зависимости от того четный или нечетный член последовательности F_n, всегда равно ±1

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,\ldots \tag{1}$$

где $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

В 1879 году бельгийский математик Эжен Каталани обобщил (1) и формула Кассини приняла следующий вид:

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n+1} F_r^2 \tag{2}$$

где F_r – r-е число Фибоначчи.

Соотношение (2) получило название тождество Каталани. В случае $r = 1$ оно соответствует тождеству Кассини (1).

Для последовательности чисел Люка

$$\begin{array}{ccccccccccccc} L_{-3} & L_{-2} & L_{-1} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 \ldots, \\ -4 & 3 & -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 & 29 & 47 \ldots, \end{array} \qquad L_1 = 1,\ L_2 = 3,$$

тождество Кассини имеет вид:

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = (-5)^n.$$

где $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

Обобщенное тождество Кассини-Каталани

$$L_n^2 - L_{n-k} L_{n+k} = (-5)^{n+1} F_k^2 .$$

Отношения чисел Фибоначчи и чисел Люка при возрастании n ($n \to \infty$), стремится к золотому сечению

$$\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1{,}618034... = \Phi, \quad \lim \frac{L_{n+1}}{L_n} = 1{,}618034... = \Phi.$$

Одним из свойств золотого сечения Ф является его связь с показательными функциями. [15, 16]:

$$\Phi = e^{\gamma}, \quad \gamma = \ln \Phi = 0{,}48128\ldots, \qquad (3)$$

$$\Phi^{-1} = e^{-\gamma}, \quad -\gamma = \ln \Phi^{-1} = -0{,}48128\ldots$$

где e – основание натуральных логарифмов, $e = 2{,}71828\ldots$

Тогда гиперболическе функции, связанные с золотым сечением:

$$sh\gamma = \frac{1}{2}, \quad ch\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad th\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad (4)$$

$$\mathrm{sh}^2\,\gamma = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{ch}^2\,\gamma = \frac{5}{4},$$

$$\mathrm{ch}^2\,\gamma - \mathrm{sh}^2\,\gamma = 1, \qquad \mathrm{ch}^2\,\gamma + \mathrm{sh}^2\,\gamma = \mathrm{ch}\,2\gamma = \frac{3}{2}.$$

$$e^{\gamma} + e^{-\gamma} = \Phi + \Phi^{-1} = \sqrt{5} = 2\mathrm{ch}\,\gamma, \qquad e^{\gamma} - e^{-\gamma} = \Phi - \Phi^{-1} = 1 = 2\mathrm{sh}\,\gamma,$$

$$ch\gamma = \frac{\Phi + \Phi^{-1,}}{2} = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2},$$

$$sh\gamma = \frac{\Phi - \Phi^{-1}}{2} = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2}.$$

Из полученного следует взаимосвязь тождества Кассини и (1) и (3) и гиперболических функций

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = 2\mathrm{sh}\,\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}} ch\gamma,$$

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = (-5)^n = 2\cdot 5\mathrm{sh}\,\gamma = 2\sqrt{5} ch\gamma,$$

2. **Тождество Кассини обобщенных последовательностей чисел Фибоначчи**

Обобщенные последовательности рекуррентных чисел, удовлетворяют следующему соотношению:

$$G_n(q) = F_n + q\,F_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3,\ldots, \quad q = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (5)$$

В зависимости от значения начальных чисел $G_1 = 1$ и $G_2 = q = 1, 2, 3,\ldots$ соотношение (5) порождает множество частных рекуррентных последовательностей:

$G_n\,(q)$ $\qquad G_0 \;\; G_1 \;\; G_2 \;\; G_3 \;\; G_4 \;\; G_5 \;\; G_6 \;\; G_7 \;\; G_8 \;\; G_9\ldots,$

$G_n(1) = F_n$	$q = 1$	0	1	1	2	3	5	8	13	21,	34…,
$G_n(2)$	$q = 2$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55…
$G_n(3) = L_n$	$q = 3$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76…,
$G_n(4)$	$q = 4$	3	1	4	5	9	14	23	37	60,	97…,
$G_n(5)$	$q = 5$	4	1	5	6	11	17	28	45	73	118

При $q = 1$ образуется основная последовательность Фибоначчи $G_n(1) = F_n$**,** при $q = 2$ – усеченная последовательность Фибоначчи $G_n(2)$, при $q = 3$ – последовательность Люка $G_n(3) = L_n$, при $q = 4$ последовательность $G_n(4)$ и т. д.

Обобщенной q-последовательности чисел Фибоначчи соответствуют тождества типа Кассини:

$$q = 1, \qquad G_n^2 - G_{n-1}G_{n+1} = -1(-1)^n,$$

$$q = 2, \qquad G_n^2 - G_{n-1}G_{n+1} = 1(-1)^n,$$

$$q = 3, \qquad G_n^2 - G_{n-1}G_{n+1} = 5(-1)^n,$$

$$q = 4, \qquad G_n^2 - G_{n-1}G_{n+1} = 11(-1)^n,$$

$$q = 5, \qquad G_n^2 - G_{n-1}G_{n+1} = 19(-1)^n.$$

В общем случае тождества типа Кассини для обобщенных последовательностей чисел Фибоначчи в зависимости от значения q можно представить соотношением:

$$G_n^2 - G_{n-1}G_{n+1} = M(-1)^n, \qquad q = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots$$

Знакопеременные числа $M(q)$ зависит от значений начальных чисел обобщенной последовательности (5):

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10…,
M	–1	1	5	11	19	29	41	55	71	89…,

и являются суммой квадрата натуральных чисел N^2 и смещенных на одну позицию чисел $(N-1)$:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10…
N^2	0^2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2…
$N-1$	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9…
M	–1	1	5	11	19	29	41	55	71	89	109…,

значения, которых определяются из соотношения

$$M(q) = N^2 + N - 1, \qquad N = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Значение знакопеременного числа M связано также с числом q

$$M = q^2 - q - 1, \qquad q = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) можно представить в виде квадратных уравнений:

$$N^2 + N - (M + 1) = 0, \qquad q^2 - q - (M + 1) = 0. \tag{8}$$

которые совпадают с уравнением типа Якобсталя [18].

3. Тождество Кассини последовательностей чисел Якобсталя

В простейшем случае, когда $M = 1$, соотношение (7) соответствует характеристическому уравнению последовательности чисел Якобсталя

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

Основная последовательности чисел Якобсталя:

J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}…
0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341…

образуется по рекуррентному соотношению

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad J_0 = 0 \text{ и } J_1 = 1.$$

Числа Якобсталя вычисляются по формулам:

$$J_{n+1} = 2^n + (-1)^n, \quad J_{n+1} = 2^n - J_n. \quad 2^n = J_n + J_{n+1}$$

Последовательность чисел Якобсталя-Люка,

JL_0	JL_1	JL_2	JL_3	JL_4	JL_5	JL_6	JL_7	JL_8	JL_9	JL_{10} …,
2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025…

образуется по рекуррентному соотношению:

$$JL_n = JL_{n-1} + 2JL_{n-2}, \quad n > 2, \quad JL_0 = 2 \text{ и } JL_1 = 1, \quad JL_2 = 5,$$

$$JL_{n+1} = 2JL_n - 3(-1)^n, \quad n > 2, \quad JL_0 = 2, \quad JL_1 = 1.$$

Отношения чисел Якобсталя J_{n+1}/ J_n и Якобсталя-Люка $JL_{n+1}| JL_n$ в пределе ($n \to \infty$)

$$\lim \frac{J_{n+1}}{J_n} = 2 = N, \qquad \lim \frac{JL_{n+1}}{JL_n} = 2 = N, \qquad \lim \frac{J_n}{JL_n} = 3. \tag{9}$$

4. Взаимосвязь последовательностей чисел Якобсталя и Фибоначчи

Тождества типа Кассини последовательностей чисел Якобсталя и Якобсталя-Люка соответственно равны:

$$J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}, \tag{10}$$

$$JL_{n-1}JL_{n+1} - JL_n^2 = (-1)^{n-1}2^{n-1} = -3^2 (J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2). \tag{11}$$

Связь чисел Якобсталя и гиперболические функции следует из связи корней уравнения (9) с экспонентой

$$N = e^{\alpha}, \quad \alpha = \ln N = \ln 2 = 0{,}69315...,$$

Тогда, гиперболические функции:

$$\text{sh } \alpha = \frac{3}{4}, \quad \text{ch } \alpha = \frac{5}{4}, \quad \text{th } \alpha = \frac{3}{5}.$$

Из полученного, следуют следующие соотношения:

$$\text{sh}\,\alpha + \text{ch}\,\alpha = 2 = N, \qquad \text{sh}\,\alpha - \text{ch}\,\alpha = -\frac{1}{2} = -\frac{N}{4},$$

.
$$\text{sh}^2\alpha + \text{ch}^2\alpha = \frac{17}{8} = \frac{N^4+1}{N^3}, \qquad \text{sh}^2\alpha - \text{ch}^2\alpha = -1.$$

$$(\text{sh}\,\alpha + \text{ch}\,\alpha)^2 = 4 = N^2, \qquad (\text{sh}\,\alpha - \text{ch}\,\alpha)^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{N^2},$$

Тождество Кассини последовательностей чисел Якобсталя и Якобсталя-Люка также связаны с гиперболическими функциями:

$$J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = (-1)^n(\text{sh}\,n\alpha + \text{ch}\,n\alpha\,)^{n-1}$$

$$JL_{n-1}JL_{n+1} - JL_n^2 = (-1)^n(\text{sh}\,n\alpha + \text{ch}\,n\alpha)^{n-1}$$

С учетом (3), (4) следуют взаимосвязи гиперболических функций Якобсталя и Фибоначчи (золотого сечения Ф):

$$\text{sh}\,\alpha = \frac{3}{2}\,\text{sh}\gamma, \qquad \text{ch}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}ch\gamma = ch^2\gamma,$$

$$\text{sh}\,\gamma = \frac{2}{3}\,\text{sh}\,\alpha, \qquad \text{ch}\,\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}ch\alpha = \sqrt{ch\alpha}.$$

Заключение

В настоящей работе приведены результаты исследований тождества Кассини обобщенных последовательностей чисел Фибоначчи и их взаимосвязи с числами Якобсталя. Начальные сведения о взаимосвязи последовательностей чисел Фибоначчи и Якобсталя приведено в работе С. Л. Василенко «Одна или две трети», как простая модель рациональной пропорции».

Это удивительная взаимосвязь чисел Фибоначчи и Якобсталя требует дальнейшего иследования. Причем не только взаимосвязи чисел Фибоначчи и Якобсталя, но и других последовательностей чисел (Люка, Пелля, Чебышева и др.)

.

Литература

1. Грехем, Р.. Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грехем, Д. Кнут, О. Поташник. – М.: Мир, 1998. – 703 с.
2. Стахов, А. П. Формула Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12542, 01.11.2005.
3. Стахов, А. П. Обобщенная формула Кассини: сколько существует целочисленных рекуррентных последовательностей, которые удовлетворяют этой формуле? // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.23932, 08.11.2017.
4. Василенко С. Л. К обобщению тождества Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17463, 16.05.2012.
5. Владимиров, В. Л. Обобщение формул Кассини на любую рекурсию второго порядка с унифицированными начальными условиями // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17413, 10.04.2012.
6. Мартыненко, Г. Я. Обобщение формулы Кассини для последовательностей Фибоначчи и Люка // «Академия Тринитаризма». М., Эл № 77-6567, публ. 15160. 14.03.2009.
7. Мартыненко, Г. Я. Пространственная типология последовательностей Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.14720, 19.02.2008.

8. Ткаченко, И. С. Обобщение идеи тождеств Кассини и Каталана для функций гиперболического типа // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.23983, 22.11.2017.

9. Семенюта, Н. Ф. Связь параметров лестничных электрических цепей с матрицами чисел Фибоначчи и соотношением Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17969, 03.04.2013.

10. Семенюта, Н. Ф. Еще немного о соотношении Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18105, 16.07.2013.

11. Семенюта, Н. Ф. Обобщенные последовательности рекуррентных чисел и приведенные тождества Кассини // Междисциплинарные исследования в науке и образовании. – 2013. № 2Kg; URL: www.es.rae.ru/mino/164-1327 (22.10.2013).

12. Семенюта, Н. Ф. Моделирование линий с распределенными параметрами рекуррентными числами / Н. Ф. Семенюта // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: материалы V межгос. науч. конф. – Минск: БГУ, 1996. – С. 123–124.

13. Семенюта, Н. Ф. Электрическая модель «Золотого сечения» / Н. Ф. Семенюта // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та мистецтві: зб. наук. пр. ВДАУ. – Винница: ВДАУ, 2003. – Вып. 15. – С. 330–335.

14. Семенюта, Н. Ф. Неизвестные ранее закономерности электрических цепей и рекуррентных чисел Фибоначчи / Н. Ф. Семенюта // Бюллетень результатов научных исследований. – СПб: ПГУПС. Вып. 6–7 (1–2). 2013. – С. 52–60.

15. Семенюта, Н. Ф. Новое о золотом сечении / Н. Ф. Семенюта // XVII Междунар. науч.-практич. конф.: Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке. – М.: «Prospero». – № 17. 30.05.2015. – С.127–131.

16. Семенюта, Н. Ф. К тайнам золотого сечения / Н. Ф. Семенюта // Евроазийский союз ученых (ЕСУ). – № 4 (13). 2015. – С. 119–122.

17. Семенюта, Н. Ф. О взаимосвязи рекуррентных рядов / Н. Ф. Семенюта // De Lapide Philosophorum. – № 1(017), 2018. – С. 116–140.

18 Horadam, A. F., Jacobsthal representation numbers / A. F. Horadam // Fib. Quart. № 34, 1996, – P.40–54.