А.П. Стахов

Проблемы Гильберта и «математика гармонии»

Введение

В лекции «Математические проблемы", представленной на 2-м Международном конгрессе математиков (Париж, 1900), выдающийся математик **Давид Гильберт** (1862-1943) сформулировал свои знаменитые 23 математические проблемы, которые в значительной степени определили развитие математики в 20-м веке [1 - 6].

Цель настоящей статьи – обсудить роль «теории чисел Фибоначчи» [7, 8] и «математики гармонии» [9] при решении 10-й и 4-й проблем Гильберта.

Десятая проблема Гильберта

В 1970 г. советский математик Юрий Матиясевич решил 10-ю проблему Гильберта [3,4]. Мы не будем рассматривать существо этого достаточно сложного решения, но в то же время остановимся на оценке роли «теории чисел Фибоначчи» в решении этой задачи, данной самим Матиясевичем. В одной из своих публикаций Матиясевич написал:

«Мое оригинальное доказательство ... основывалось на теореме, доказанной в 1942 г. советским математиком Николаем Воробьевым, но опубликованной только в третьем расширенном издании его популярной книги.... После того, как я прочитал статью Джулии Робинзон, я сразу же увидел, что теорема Воробьева может быть очень полезной. Джулия Робинзон не видела 3-го издания книги Воробьева до тех пор, пока она не получила копию от меня в 1970 г. Кто мог сказать, что бы случилось, если бы Воробьев включил свою теорему в первое издание своей книги? Возможно, что 10-я проблема Гильберта была решена на десять лет раньше!»

В развитие вопроса Юрия Матиясевича, мы вправе поставить следующий вопрос: а что бы случилось, если бы итальянский математик Фибоначчи не открыл числа Фибоначчи в 13 в.? Возможно, 10-я проблема Гильберта не была бы решена до сих пор. Конечно, теорема Воробьева, использованная Юрием Матиясевичем, является важным математическим результатом, но все же главным «виновником» решения 10-й проблемы Гильберта следует признать итальянского математика Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи). Еще в 1202 г. он опубликовал книгу “Liber abaci”, в которой ввел новую числовую последовательность - числа Фибоначчи.

Главный вывод из этих рассуждений состоит в том, что решение одной из наиболее сложных математических проблем – 10-й проблемы Гильберта – получено с использованием «теории чисел Фибоначчи»! И этот факт сам по себе поднимает на высокий уровень как «теорию чисел Фибоначчи» [7, 8], так и «математику гармонии» [9], которая является развитием и обобщением современной “теории чисел Фибоначчи».

История четвертой проблемы Гильберта

Естественно, что Гильберт не мог пройти мимо нерешенных математических проблем, связанных с неевклидовой геометрией. В качестве геометрий, наиболее близких к евклидовой геометрии, Гильберт называет геометрию Лобачевского (гиперболическую геометрию) и геометрию Римана (эллиптическую геометрию). Саму же 4-ю проблему Гильберт формулирует так: **«Более общий вопрос, возникающий при этом, заключается в следующем: возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии».**

Детальный анализ всех попыток решения 4-й проблемы Гильберта дан в статье «Еще раз о 4-й проблеме Гильберта» [10], автором которой является известный российский математик доктор физико-математических наук Самуил Арансон. Арансон подчеркивает, что решением 4-й проблемы Гильберта занимались многие математики.

История вопроса о научных результатах, относящихся к 4-ой проблеме Гильберта, на русском языке подробно изложена в статье И.М. Яглома «К четвёртой проблеме Гильберта», опубликованной в сборнике «Проблемы Гильберта» [11] (эта книга в дальнейшем была переиздана), а также в статье американского геометра Г. Буземана [12].

Первым вкладом в решение этой проблемы считается диссертация немецкого математика Гамеля, защищённая в 1901 г. под руководством Гильберта (на русском языке результаты Гамеля и комментарии к нему читатель может найти в вышеуказанных статьях Г.Буземана и И.М. Яглома). Как указано в этих статьях, «работа Гамеля, разумеется, не исчерпала всего, что можно сказать о четвёртой проблеме Гильберта, другие подходы к которой неоднократно предлагались и позже».

Таким образом, из этого замечания вытекает важный вывод, что **существуют и другие подходы к решению 4-й проблемы Гильберта.**

Большие усилия в решении 4-й проблемы Гильберта были сделаны советским математиком академиком А.В. Погореловым (1919 - 2002), который написал книгу «Четвертая проблема Гильберта» [13]. Аннотация к книге А.В. Погорелова гласит следующее:

«Книга содержит решение известной проблемы Гильберта об определении всех с точностью до изоморфизма реализаций систем аксиом классических геометрий (Евклида, Лобачевского, эллиптической), если в них опустить аксиомы конгруэнтности, содержащие понятие угла, и пополнить эти системы аксиомой «неравенство треугольника». Книга рассчитана на студентов-геометров старших курсов, аспирантов и научных работников».

К сожалению, мировое математическое сообщество не восприняло в полной мере решение, полученнное А.В. Погореловым, в качестве окончательного решения 4-й проблемы Гильберта, что отражено в статье Арансона [10] и в статьях на эту тему, выставленных в Википедии [1,2,5,6]. Любопытно сравнить статьи в Википедии, посвященные десятой [3] и четвертой [5] проблемам Гильберта. В статье [3], четко отмечается, что «доказательство алгоритмической неразрешимости этой задачи заняло около двадцати лет и было завершено Юрием Матиясевичем в 1970 году», то есть, приоритет в решении этой сложнейшей математической проблемы однозначно приписывется Юрию Матиясевичу. В статье [5] подобного категорического утверждения по поводу решения 4-й проблемы Гамелем, Погореловым или кем-либо другим не содержится, хотя и имеется ссылка на книгу А.В. Погорелова [13].

Любопытно, что в статье [5] содержится ссылка на статью Самуила Арансона [10], в которой дается критический анализ решения Погорелова [13]. Уместно привести цитату из статьи Арансона [10]:

«Погорелов выбрасывает аксиому конгруэнтности углов, заменяя её аксиомой неравенства треугольника: «длина любой стороны треугольника всегда не превосходит сумму длин двух его других сторон». В случае такой замены для каждой из этих геометрий аксиома конгруэнтности углов становится ТЕОРЕМОЙ, если реализовывать геометрии Евклида, Лобачевского или Римана. В противном случае, система аксиом Погорелова не может удовлетворять трём условиям: независимости, непротиворечивости и полноты.

После фактического доказательства этой теоремы, каким бы изящным методом она не получена, состоящей в реализации этих аксиом, автоматически восстанавливаются все прежние системы аксиом для геометрий Евклида, Лобачевского и Римана. В этом, как нам кажется, и состоит ***вклад Погорелова в четвёртую проблему Гильберта,*** *и, следовательно, то что он сделал,* ***не есть полное решение четвёртой проблемы Гильберта».***

Сомнения относительно решения 4-й проблемы Гильберта А.В. Погореловым подтверждаются статьей «Проблемы Гильберта», выставленной в Викпедии [1]. В этой статье содержится перечень всех проблем Гильберта, дается краткая формулировка каждой проблемы и ее статус (решена, не решена, частично решена и т.д.).

Краткая формулировка 10-й проблемы Гильберта звучит следующим образом: «Есть ли универсальный алгоритм решения диофантовых уравнений?». Статус проблемы – «решена». Дается пояснение к этому статусу: **«Юрий Матиясевич в 1970 году доказал алгоритмическую неразрешимость вопроса о том, имеет ли произвольное диофантово уравнение хотя бы одно решение. Изначально проблема была сформулирована Гильбертом не в качестве дилеммы, а в качестве поиска алгоритма: в то время, видимо, даже не задумывались о том, что может существовать отрицательное решение подобных проблем».**

Что касается 4-й проблемы Гильберта, то ее краткая формулировка звучит следующим образом: **«Перечислить метрики, в которых прямые являются геодезическими».** Интересно звучит статус проблемы: **«слишком расплывчатая».** Дается пояснение к этому статусу: «Согласно Рову (Rowe) и Грею (Gray) ... большинство проблем были решены. Некоторые из них не были достаточно точно сформулированы, однако достигнутые результаты позволяют рассматривать их как «решённые». **Ров и Грей говорят о четвёртой проблеме как о такой, которая слишком нечётко поставлена, чтобы судить о том, решена она или нет».** Существенно подчеркнуть, что в статье [1] книга А.В. Погорелова [13] вообще никак не комментируется и даже не упоминается в списке литературы.

Примерно такая же информация относительно проблем Гильберта содержится и в англоязычной версии Wikipedia [2, 4, 6]. Проанализируем англоязычную статью [2], посвященную анализу проблем Гильберта. В статье приводится таблица всех 23 проблем Гильберта и, дается краткое объяснение и статус каждой проблемы.

По поводу 10-й проблемы сказано следующее [2]. Краткое объяснение: **«Find an algorithm to determine whether a given polynomial Diophantine equation with integer coefficients has an integer solution» («Найти алгоритм, который позволяет определить, имеет ли решение в целых числах заданный многочлен диофантового уравнения с целыми коэффициентами»).** Статус проблемы: **«Resolved. Result: impossible. Matiyasevich's theorem implies that there is no such algorithm” («Решена. Результат: невозможно. Теорема Матиясевича подразумевает, что такого алгоритма не существует»).**

По поводу 4-й проблемы Гильберта сказано следующее [2]. Краткое объяснение: «**Construct all metrics where lines are geodesics»** (Построить все метрики, в которых линии являются геодезическими). Статус проблемы: «**Too vague to be stated resolved or not». («Слишком расплывчато, чтобы определить решена проблема или нет».).** Приводится следующее замечание, касающееся 4-й проблемы Гильберта: **«According to Gray, most of the problems have been solved. Some were not defined completely, but enough progress has been made to consider them "solved"; Gray lists the fourth problem as too vague to say whether it has been solved». («Согласно Gray, многие проблемы Гильберта решены. Некоторые из них были не определены полностью, но достаточный прогресс был достигнут, чтобы считать их «решенными», согласно Грею, четвертая проблема настолько расплывчата, чтобы ответить, является ли она решенной»).**

Более детальная информация о статусе 4-й проблемы Гильберта содержится в статье [6], которая гласит:

«In mathematics, **Hilbert's fourth problem ...** was a foundational question in geometry. In one statement derived from the original, it was to find geometries, whose axioms are closest to those of Euclidean geometry if the ordering and incidence axioms are retained, the congruence axioms weakened, and the equivalent of the parallel postulate omitted. A solution was given byGeorg Hamel.

The original statement of Hilbert, however, has also been judged too vague to admit a definitive answer»

Перевод: («В математике, **четвертая проблема Гильберта ...** была основополагающим вопросом в геометрии. В одной формулировке, взятой из оригинала, суть проблемы состоит в том, чтобы найти геометрии, аксиомы которых наиболее близки к аксиомам евклидовой геометрии, если сохранить аксиому порядка, ослабить аксиомы конгруентности, и опустить эквивалент постулата о параллельных. Была решена Georg Hamel. Первоначальная формулировка Гильберта, однако, звучит слишком расплывчато, чтобы судить об определенном ответе»

Хотя в статье [6] содержится утверждение, что проблема решена Гамелем (Hamel), но это утверждение не согласуется с примечанием: «**формулировка Гильберта, однако, звучит слишком расплывчато, чтобы судить об определенном ответе».**

Любопытно, что в отличие от русскоязычной статьи [5] в англоязычной статье [6] нет даже упоминания о книге А.В. Погорелова [13].

Из этих рассуждений мы можем сделать следующие любопытные выводы:

1. Решение 4-й проблемы Гильберта, полученное немецким математиком Гамелем (Hamel) в 1901 г., не исчерпывает всего, **«что можно сказать о четвёртой проблеме Гильберта, другие подходы к которой неоднократно предлагались и позже».**
2. Математическое сообщество (как англоязычное, так и русскоязычное) не признает решения 4-й проблемы Гильберта, полученного А.В. Погореловым [13]. Как подчеркивает Арансон, то что сделал Погорелов, ***«не есть полное решение четвёртой проблемы Гильберта».***
3. Математическое сообщество (как англоязычное, так и русскоязычное) считает эту проблему «слишком расплывчатой», то есть, такой, **«которая слишком нечётко поставлена, чтобы судить о том, решена она или нет».** То есть, математичское сообщество возложило ответственность за то, что 4-я проблема Гильберта до сих пор не решена, на самого Гильберта, который сформулировал ее «слишком расплывчато».
4. Несмотря на критическое отношение математиков к 4-й проблеме Гильберта, необходимо подчеркнуть чрезвычайную важность ее решения для развития математики и всего теоретического естествознания. Без всякого сомнения, интуиция Гильберта привела его к выводу, что геометрии Лобачевского, Римана и другие известные на тот период неевклидовые геометрии не исчерпывают все их возможныы варианты. 4-я проблема Гильберта нацеливает исследователей на поиск новых неевклидовых геометрий, которые являются ближайшими геометриями к обыкновенной евклидовой геометрии. И не исключено, что такие геометрии существуют в Природе.
5. Наиболее важный вывод состоит в том, что математическое сообщество (как русскоязычное, так и англоязычное) **не исключает другие подходы к решению 4-й проблемы Гильберта.** Именно этот вывод является исходным для работ [14 - 18], в которых предлагается новый (нетрадиционный) подход к решению 4-й проблемы Гильберта.

Анлизируя решение 4-й проблемы Гильберта, приведенное в работах [17, 18], Арансон пишет:

«Таким образом, здесь утверждается, что Погорелов решил проблему в "определенном смысле". То есть, если даже согласиться, что Погорелов решил 4-ую проблему Гильберта, то речь идет лишь о решении не в полном, а в "определенном смысле", то есть, частном решении этой проблемы, откуда вытекает, что вполне возможны решения 4-й проблемы Гильберта и в "других смыслах", поскольку сама проблема считается "весьма расплывчатой", то есть 4-я проблема Гильберта является, несомненно, одной из самых сложных.

Именно поэтому решение проблемы, изложенное в следующих статьях:

1). Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm

2). Stakhov, A.P. Aranson, S.Kh. "Golden" Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert's Fourth Problem. Congressus Numerantium, 193 (2008), 119-156,

является нашим оригинальным решением 4-й проблемы Гильберта, которое радикальным образом отличается от решения, изложенного в книге Погорелова.

Мы же нигде не говорим о том, что у нас получено абсолютно полное и законченное решение этой проблемы, хотя эти слова в разных вариациях иногда приписывают А.В. Погорелову его доброжелатели, но сам Алексей Васильевич, который в жизни был чрезвычайно скромным человеком, нигде это не утверждает».

И еще одно замечание. Ссылка на статью Арансона [10] в статье «Четвертая проблема Гильберта» [5] является **знаменательным событием в признании нового решения 4-й проблемы Гильберта** (по меньшей мере, со стороны русскоязычного математического сообщества**).** Его признанию в англоязычном математическом сообществе способствовали публикации статей на эту тему в англоязычных журналах Congressus Numerantium [18] , Applied Mathematics [14 - 16], Visual Mathematics [19].

Новая задача для теоретического естествознания

Возникает однако вопрос: в чем состоит прикладное значение введенных в [21] гиперболических λ-функции Фибоначчи и Люка и вытекающего из них решения 4-й проблемы Гильберта?

Для ответа на этот вопрос мы должны обратиться к новой геометрической теории филлотаксиса, созданной украинским исследователем Олегом Боднаром [22]. Новая геометрическая теория филлотаксиса, основанная на симметричных гиперболических функциях Фибоначчи [23, 24], вселяет надежду, что гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка и новые «геометрии Лобачевского», вытекающие из решения 4-й проблемы Гильберта, найдут практические приложения в современной науке. «Геометрия Боднара» показывает, что «мир филлотаксиса», одного из самых удивительных явлений ботаники, является «гиперболическим миром», основанным на гиперболических функциях Фибоначчи (или «золотых» гиперболических функциях), основанием которых является классическая «золотая пропорция». При этом, к этому гиперболическому миру относится огромное количество ботанических объектов, с которыми мы сталкивемся в окружающей нас природе: сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника, корзинки цветов, деревья и т.д.. Таким образом, в ботаническом явлении филлотаксиса «гиперболичность» проявляет себя в «золоте».

Однако, гиперболичесие функции Фибоначчи и Люка [23, 24] являются частным случаем гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка [21]. Последние основываются на «металлических пропорциях», в частности, на «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим видам «металлических пропорций» [20] . В этой связи у нас есть все основания высказать предположение, что и другие типы гиперболических λ-функций, описанных в [21], могут стать основой для моделирования новых «гиперболических миров», которые могут реально существовать в природе, но которые наука до сих пор не обнаружила, потому что в современной науке были неизвестны гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка и перед ней никто не ставил такой задачи. **Основываясь на блестящем успехе «геометрии Боднара» [22], мы можем поставить перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на других классах гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка.**

При этом, возможно, первым кандидатом на «революцию» в естествознании может стать «серебряная пропорция» $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ и основанные на ней «серебряные» гиперболические функции [21].

Интерес к «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ и «серебряным» гиперболическим функциям значительно возрос в последние годы. В этой связи особый интерес представляет статья Олега Боднара «Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций» [25] и статья [26] известного российского исследователя Александра Татаренко. В статье [26] Александр Татаренко развивает теорию T_m-гармоний, которые по существу совпадают с «металлическими пропорциями». При этом особую роль в дальнейшем развитии теоретического естествознания он отводит «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$, которую он называет T_2-гармонией:

«Важнейшим и неожиданным результатом исследований T_m-гармоний было установление двух фактов:

1) вторая Золотая $T_{m=\pm 2} = \sqrt{2} \pm 1$- гармония (а не первая — согласно нумерации в ряде $T_{\pm m}$-чисел — классическая «золотая пропорция» Ф) является доминантой, царствующей в беспредельном мире T_m-гармоний.

2) «функцией» второй Золотой $T_{m\pm 2}$-гармонии является число $\sqrt{2}$ - реликтовое число – корень из двух, встречающийся в архи-громадном множестве формул и закономерностей различных областей естествознания, что равнозначно причастности T_2 непосредственно или косвенно ко множеству (а возможно и ко всем) законов Природы и ее констант. Таким образом, T_2 буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам.

Установление факта доминантности T_2-гармонии, а с ней и особого статуса ее «функции» $\sqrt{2}$ является заключительным аккордом — важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника.

Требуется кардинально новое мышление о Гармонии Мира».

Таким образом, Татаренко обращает особое внимание на «серебряную» пропорцию $T_2 = 1+\sqrt{2}$, которая «буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам». Более того, он считает введение «серебряной» пропорции» $T_2 = 1+\sqrt{2}$ в современную науку **«важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птолемеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника».**

Заключение

Общий итог исследования, выполненного в работах [14 – 19], состоит в том, что получено бесконечное множество метрических $\lambda -$форм плоскости Лобачевского ($\lambda > 0$-заданное положительное число). Все эти формы изометричны классической метрической форме плоскости Лобачевского. А это означает, что полученные в работах [14 –19] новые модели плоскости Лобачевского, основанные на «металлических пропорциях» [20], вместе с классическими геометриями Лобачевского, Римана и другими известными неевклидовыми геометриями **“могут рассматриваться как ближайшие геометрии к обыкновенной геометрии Евклида» (Давид Гильберт).**

Таким образом, результаты, полученные в работах [14 - 19], являются оригинальным решением 4-й проблемы Гильберта, которая считается одной из сложнейших проблем Гильберта, до сих пор нерешенных. Ясно, что это решение не может рассматриваться как окончательное решение этой важной математической проблемы. И оно, несомненно, будет стимулировать математиков к поиску ее новых решений. Мне кажется, что не к лицу математикам скрывать свою беспомощность при решении 4-й проблемы Гильберта, присваивая ей статус «слишком расплывчатая». Повидимому, сам Гильберт так не считал, когда формулировал задачу решения этой проблемы перед своим аспирантом Гамелем (Hamel).

Литература

1. Проблемы Гильберта. Материал из Википедии – свободной энциклопедии http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D1%8B_%D0%93%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B1%D0%B5%D1%80%D1%82%D0%B0
2. Hilbert's Problems. From Wikipedia, the free Encyclopedia http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_problems
3. Десятая проблема Гильберта. Материал из Википедии – свободной энциклопедии http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D1%81%D1%8F%D1%82%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%93%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B1%D0%B5%D1%80%D1%82%D0%B0
4. Hilbert's Tenth Problem. From Wikipedia, the free Encyclopedia http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_tenth_problem
5. Четвертая проблема Гильберта. Материал из Википедии – свободной энциклопедии http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B5%D1%82%D0%B2%D1%91%D1%80%D1%82%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%93%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B1%D0%B5%D1%80%D1%82%D0%B0
6. Hilbert's Fourth Problem. From Wikipedia, the free Encyclopedia http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_fourth_problem.
7. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978 - 144 с. (первое издание - 1961).
8. Hoggat V. E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
9. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai: World Scientific, 2009. – 748 p. http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/6635
10. Арансон С.Х. Ещё раз о 4-й проблеме Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15677, 01.12.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321180.htm
11. Проблемы Гильберта (под общей редакцией П.С. Александрова). М.: Наука, 1969.
12. Буземан Г. О четвертой проблеме Гильберта. Успехи математических наук. 1966, том.21, № 1(27). – с.155-164.
13. Погорелов А.В. Четвертая проблема Гильберта. М.: Наука, 1974.
14. Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and "Golden" Fibonacci Goniometry. Applied Mathematics, 2011, 2 (January), 74-84.
15. Stakhov A., Aranson S.. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part II. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar's Geometry). Applied Mathematics, 2011, 2 (February), 181-188.
16. Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part III. An Original Solution of Hilbert's Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011, 2 (March).
17. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm
18. Stakhov, A.P. Aranson, S.Kh. "Golden" Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert's Fourth Problem. Congressus Numerantium, 193 (2008), 119-156.
19. Stakhov A.P. On the general theory of hyperbolic functions based on the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions and on Hilbert's Fourth Problem. Visual Mathematics, Volume 15, No.1, 2013.
20. Vera W. de Spinadel. The family of Metallic Means. Visual Mathematics, Vol. I, No. 3, 1999, http://members.tripod.com/vismath/

21. Stakhov AP. Gazale formulas, a new class of hyperbolic Fibonacci and Lucas functions and the improved method of the "golden" cryptography. //Академия Тринитаризма, Москва: № 77-6567, электронная публикация 14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm

22. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидовая геометрия в природе и искусстве.Львов: Свит, 1994. - 204 с.

23. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, 23(2): 379-389.

24. Stakhov A., Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series, and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No.3, 2006

25. Олег Боднар, Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.17259, 26.01.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322135.htm

26. Татаренко А.А. Золотые T_m-гармонии и D_m-фракталы // Академия Тринитаризма. Москва: № 77-6567, электронная публикация 12691, 09.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm