С.Л. Василенко

Гармонический ряд через призму чисел Фибоначчи и золотого сечения

Хаос – это лестница, ведущая к порядку и гармонии

Хаос и гармония – невидимые полюса мироздания.

Хаос (лат. *chaos)* буквально означает разверстую зияющую бездну, беспредельное пространство. В философии – первичное бесформенно-стихийное состояние и первоначало мира, вбирающее в себя всё сущее. В повседневной практике и быту – полная неразбериха, беспорядочная материя, неорганизованная стихия.

В определенном смысле хаос – синергетическая метафора сознания. Возможно, он по-своему лучше организован, чем порядок в виде различимой мыслимости совокупности вещей (по Лейбницу). Такой себе нехаотичный хаос, подобно детерминированному хаосу в нелинейных динамических системах, который чрезвычайно чувствителен к начальным условиям. В хаосе может быть больше сокрытой упорядоченности, чем в видимом кажущемся порядке.

Что более существенно: ложка гармонии или щепотка хаоса? – Вопрос риторический.

В политике свобода (анархия = самоуправление) – мать порядка.

Порядок подразумевает множество элементов любой природы, между которыми существуют устойчивые и регулярные связи-отношения в пространстве и времени.

Хаос предполагает нарушение устойчивости. Их синтез движет нелинейную динамическую систему к аттрактору, стремясь её перевести в стабильное состояние [1, 2].

Хаос рождает порядок (Ф.Ницше). Порядок формирует соразмерность целого и частей.

Без хаоса нет гармонии, хаос – основа её существования. «В гармонии получают внешнее проявление внутренняя упорядоченность и мера бытия» [3, с. 128].

С другой стороны, в ходе природных процессов неживого мира энтропия увеличивается и хаос нарастает.

Деление на порядок и хаос – само по себе когнитивное искажение и хаотическая неразбериха.

Рождение порядка из видимого хаоса и особое восприятие процессов становления гармонии наглядно проявляется через органичное объединение музыки и слова.

Единственный рок-музыкант, удостоенный Нобелевской премии в области литературы (2016), легендарный американский певец Боб Дилан – автор текстов по широкому спектру политических, социальных, философских и литературных тенденций как-то высказался: *Chaos is a friend of mine. It's like I accept him, does he accept me. Truth is chaos. Maybe beauty is chaos*. – Хаос – мой друг, словно я его принимаю, а он меня. Истина – это хаос. Наверное, красота – это тоже хаос.

В широком понимании культура – обожествленный хаос: свободный в своем праве выбора человек может стать на сторону света и с ним пребывать, либо на сторону тьмы и превратиться в призрачную тень.

Вода и божественная гармония.

Если к бескрайнему потоку информации нашего эмпирического опыта подходить прагматически, путем урегулирования философских споров, то в мире не остается места для особо фантастического и/или неповторимого волшебства, несмотря на обилие образов и палитру красок, множество форм и явлений.

Вместо чудес и магии – реально-осознаваемые вещи, результаты, факты...

Анализ и синтез, как методы познания, а с ними научные гипотезы и теории.

Другое дело, что многое мы ещё не знаем и вряд ли когда познаем. Отсюда берет истоки метафизика, возникает феерическая мистика. Не отстает от них общая религиозная идея, которая в практическом отношении может быть социально и культурно полезной, исходя из конкретики интерпретаций действительности.

Самое большое волшебство, что этот мир вообще есть.

Второе, что всё движется-крутится-взаимодействует.

Наконец, возможный «генеральный вдохновитель и конструктор мироздания» в любом его мыслимо-воображаемом представлении, – дело вкуса и предпочтений.

Остальное естественным образом является производной этих фундаментальных начал.

Среди них обособленно стоит воистину земное чудо природы – вода, которая испокон веков имела сакральное значение, как неповторимый феномен, символ жизни и абсолютной гармонии. Прежде всего, в виду большой совокупности уникальных свойств [4].

Как многократно доказано, вода – самое необыкновенное вещество с многочисленными редкостными свойствами целого, характеристиками истинной гармонии и структурирования.

Например, водород горит. Кислород поддерживает горение. Но вода тушит огонь. Понятно пеленой пара. И всё-таки... Вода – последняя, которая утекает, и первая, которая прибывает. Вместе со стрелой времени.

Сплошная, непрерывная гармоническая последовательность. Мягкая, текучая. Образ предельности и одновременной конечности трех агрегатных состояний: лед, жидкость, пар.

В капле воды отражается весь мир. Вода – сок жизни на Земле, архетип женственности.

В этой связи уместно напомнить, что книги Ветхого Завета были написаны в основном на иврите, в котором словосочетание *святой дух* имел четко выраженный грамматический женский род.

Речь вовсе не о надуманном биологическом поле бога в человеческом смысле: старик с бородой или девушка с косой. Суть в ином.

Именуемая сегодня связка слов "святой дух" (божья сила, энергия) в оригинале первоисточников и по идейному замыслу авторов-первопроходцев Библии представлялась и описывалась как женский материнский образ. То есть *святая душа*. А это буквально означает, что кроме природно-мужского начала, богу одновременно присущи женственные аспекты и черты: доброта, забота, надежда, верность, гармония, благодать и т.п.

Поэтому и сотворил бог Адама и Еву – по образу и подобию своему.

У бога тоже есть душа.
Она носилась над водою,
Мир возродила, не спеша,
И жизнь наполнила собою...

Это уже потом изощренные богословы и переводчики полностью "омужичили" бога, в том числе через образы отца, сына и святого духа. Возобладало главенство и властные качества мужчин в большинстве культур.

Женское начало святой души ушло на второй план или вовсе утратилось.

На долгие времена нравственной установкой стала мужская жесткость-жестокость и драматическая женская покорность.

В Книге Числа рассказывается о том, как самый главный пророк Моисей ("взятый из воды") возмутился милосердием солдат и от имени бога, якобы его пославшего, призвал военачальников к геноциду мадианитян: «убейте всех детей мужского пола, и всех женщин, познавших мужа на мужеском ложе, убейте» (Чис. 31:17).

Между тем, согласно лингвистическим исследованиям, существительные женского, мужского и среднего родов в русском языке составляют соответственно 43, 40,5 и 16,5 %.

В архаических и классических мифах центральное место занимает связь богини-матери с водой, которая ассоциировалась с женским лоном и материнским чревом.

Подобная символика воды сохранилась в христианской традиции крещения.

В современной народной культуре Дева Мария стала защитницей на водах, покровительницей рыбаков и мореплавателей.

Вода подсказывает-дает обобщающую канву делимости целого и служит «основанием очень важного методологического принципа. Любой сложный объект может члениться либо на элементы, либо на единицы (для воды это молекулы – *С.Л.*). Особенность членения объекта на единицы состоит в том, что продукты членения сохраняют свойства целого. Членение на элементы (кислород, водород – *С.Л.*), наоборот, приводит к таким продуктам, которые свойств целого не имеют» [5].

Любопытно, но на бытовом уровне вода одновременно привязывается к пустословию или бесполезному (бессмысленному) занятию: толочь воду в ступе, носить воду решетом, переливать воду из пустого в порожнее.

Не беда. Вода камень точит.

С древнейших времен гармония воды и камня, гармония воды и растений – это широкий простор непреходящего познания истины.

Эта трудная гармония.

Ничто не дается так трудно и не воспринимается так легко, как гармония.

Российский ученый В.Ю.Татур точно подметил и обосновал [6] со свойственной ему психологией мышления, что гармония не просто принцип соразмерности частей в целом, а способ существования трансфинитного, бесконечного в финитном конечном.

Самовыражение бесконечного в конечном, в разных формах и количественных отношениях. – Этот тезис важен для нашего изложения.

Иначе говоря, каково целое, такова и гармония, как способ проявления самого целого. Если целое развивается, находится в движении, то согласованность, пропорциональность и гармония составляющих элементов также становится подвижно-динамичной [1].

Это уже позже культурология перенаправила гармонию в русло эстетически-субъективной категории красоты.

Какая к бесу гармония-красота от землетрясений и вулканов? – Между тем, именно благодаря их влиянию на геологическое преобразование Земли сначала появилась суша, а потом зародилась жизнь.

Хаос – не всегда плохо, порядок – не всегда хорошо. Внешняя красивость обманчива.

"Золотая" парадигма.

Математические особенности золотой пропорции исторически привели к проявлению мифической составляющей. Действительно, она обладает рядом воистину замечательных свойств [7, 8]. Но ещё больше вымышленных применений.

Многие авторы невольно становятся заложниками слабо обоснованных предположений, стремясь найти константу золотого отношения во всём, что количественно выражается между полутора и двумя.

Например, нередко утверждается, что объекты с золотой пропорцией якобы воспринимаются людьми как наиболее гармоничные [9]. Возможно, и так. Но в любом случае к этим утверждениям следует относиться с долей скептицизма. Ибо на поверку они часто оказываются результатом случайных совпадений либо искусственной подгонки.

Пропорция, приводящая к золотому сечению (ЗС), часто именуется гармонической, а само сечение – гармоническим делением.

В обновленной трактовке золотая пропорция формулируется без традиционного использования слов «меньшее – большее» [10]: *целое относится к своей части, как она – к своему отклонению от целого* $1/b = b/(1–b)$.

Исходя из квадратично-золотого числового тождества $\Phi^2 = 1 + \Phi$, легко образуется бесконечное разложение константы золотого сечения $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$ в цепную (непрерывную) дробь, состоящую исключительно из единиц.

Такая единично-философская сущность золотой пропорции позволяет считать число ЗС единичной монадой структуры мироздания, а огрубление константы ЗС с любым конечным количеством знаков после запятой приводит к простому алгоритму "сотворения мира" на основе двучленно-аддитивной рекурсии [11].

Отсюда вытекает и главная особенность константы ЗС: среди всех иррациональных чисел она хуже всего поддается аппроксимации рациональными дробями.

«В отношении ошибок при приближенном вычислении иррациональных чисел с помощью подходящих дробей и их разложений в непрерывные дроби число Ф представляет собой наихудший случай» [12, с. 86] в смысле скорости сходимости.

Это "роднит" константу ЗС с числовым гармоническим рядом, который чрезвычайно медленно, черепашьим шагом, но всё-таки расходится, уходя в бесконечную даль.

Гармонический ряд без прикрас.

Гармонический ряд – математическое понятие: бесконечная сумма, члены которой обратны последовательным числам n натурального ряда $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$.

Название связано с музыкой. Ряд складывается из гармоник – звуковых частот, которые являются целыми кратными относительно основной частоты сигнала.

Если извлекаемый звук струны принять за основной тон определенной высоты, то n-я гармоника соответствует звуку струны длиной $1/n$ от длины исходной струны.

Есть и строго математическое обоснование, берущее начало от средних значений и пропорций Античности [13]: каждый член гармонического ряда (кроме первого) – среднее гармоническое двух соседних членов.

Незатейливая и загадочная бесконечная сумма бесконечно уменьшающихся величин, в которой воедино слились: простота в понимании построения и сложность в глубине свойств.

Одна из немногих, если не единственная сумма, при анализе и подсчете которой подводит интуитивное восприятие. Чрезвычайно медленно, но уверенно, сумма становится бесконечно большой. – Так что интуиция порой обманчива.

Группировка сходящихся рядов всегда дает сходящийся ряд. Если же после группировки получается расходящийся ряд, то исходный также расходится.

Средневековой ученый Николай Орем просто и наглядно доказал расходимость гармонического ряда. Он сравнил его с рядом, где знаменатели дополнены до степени двойки, и после группировки получил расходящийся ряд:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underline{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underline{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\cdots \\ &> 1+\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underline{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\underline{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\cdots \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\to\infty\end{aligned}$$

Существуют и другие сопоставления, например, основанные на числах Фибоначчи $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n :\ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ с их свойством $\dfrac{F_n}{F_{n+2}} > \dfrac{1}{5}$ [14]:

$$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{F_3}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\frac{1}{F_4}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{>\frac{1}{F_5}} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{F_6}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}}_{>\frac{1}{F_7}} + \cdots$$

$$> 1 + \frac{F_1}{F_3} + \frac{F_2}{F_4} + \frac{F_3}{F_5} + \frac{F_4}{F_6} + \cdots = 1 + \sum_{n\ge 1}\frac{F_n}{F_{n+2}} > 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \cdots \to \infty .$$

Более того, гениальный Эйлер доказал (1737), если в гармоническом ряде оставить только члены с простыми числами в знаменателе, ряд также расходится, а сам гармонический ряд выражается через бесконечное произведение по всем простым числам p:

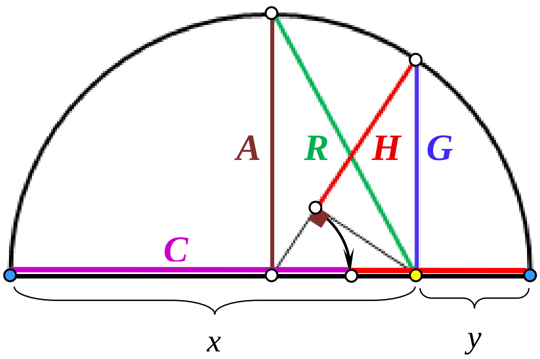
$$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n} = \prod_{p}\frac{1}{1-p^{-1}} .$$

Члены гармонического ряда являются среднегармоническим двух соседних членов, поэтому есть смысл сравнить его с другими средними величинами.

И здесь выявляется примечательная особенность: среди наиболее распространенных средних величин, используемых ещё с древних времен [13], наименьшим (!) является среднее гармоническое (рис. 1):

$$H = \frac{2xy}{x+y} = \frac{G^2}{A}, \qquad \frac{1}{H} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\Big/ 2 .$$

Построения в полукруге, диаметр которого разделен на значения x, y, сравнительно легкие и не требуют особых комментариев.



$\boldsymbol{H} \le \boldsymbol{G} \le \boldsymbol{A} \le \boldsymbol{R} \le \boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{H} = \dfrac{2xy}{x+y}$ – гармоническое (*Harmonic*);

$\boldsymbol{G} = \sqrt{xy}$ – геометрическое (*Geometric*);

$\boldsymbol{A} = \dfrac{x+y}{2}$ – арифметическое (*Arithmetic*);

$\boldsymbol{R} = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ – квадратическое (*Root-mean-square*);

$\boldsymbol{C} = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ – контргармоническое (Contraharmonic)

Рис. 1. Геометрическая интерпретация наиболее распространенных средних в полукруге

Не менее эффектно выглядят геометрические построения средних величин в трапеции общего вида с длинами оснований x, y (см. приложение).

Сумма обобщенного гармонического ряда порядка s равна значению дзета-функции Римана $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^s}=\zeta(s)$. В частности, $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

Обобщенный гармонический ряд (частный случай ряда Дирихле) $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^s}$ расходится при $s \leq 1$ и сходится при $s > 1$ [15]. Есть немало интересных аналитических сумм с гармоническими числами $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, например [16]:

$$\sum_{n\geq1}\frac{H_n}{2^n n}=\frac{\pi^2}{12},\qquad \sum_{n\geq1}\frac{H_n^2}{n^2}=\frac{17}{4}\zeta(4)=\frac{17}{360}\pi^4,\qquad \sum_{n\geq1}\frac{H_n}{n^3}=\frac{5}{4}\zeta(4)=\frac{1}{72}\pi^4.$$

Истонченный гармонический ряд.

Расходимость гармонического ряда, что называется, на грани фола (срыва).

Стоит только как-то его немного "обрезать", и усечено-модифицированный ряд становится сходящимся.

Таковым является ряд Кемпнера K_d – "истонченный" гармонический ряд, полученный удалением из него всех членов, содержащих одну цифру d.

Если, например, в гармоническом ряде убрать члены, содержащие цифру 9 ("истонченный" ряд Кемпнера), то полученный ряд уже сходится, и его сумма равна ~22,92.

Если оставить слагаемые, не содержащие любую фиксированную последовательность цифр, то полученный ряд будет также сходиться. С ростом разрядов в числе n всё больше слагаемых (пусть и чрезвычайно малюсеньких) удаляется из суммы истонченного ряда.

То есть расходимость исходного ряда весьма неустойчива, если можно так выразиться.

Как шарик на сомбреро, которое бесконечно увеличивается в размерах.

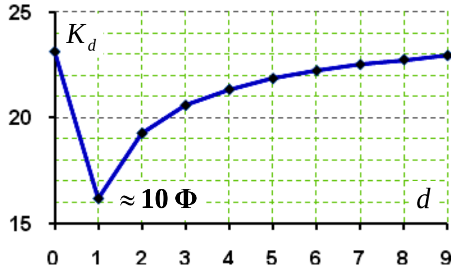
Его устойчивость всё время находится на грани бифуркации, – чуть коснись, и он из бесконечности скатиться в конечное положение.

Выбрасывать числа, в десятичной записи которых не содержатся девятки.

Истонченный ряд – ряд, в котором оставлены только члены-слагаемые, знаменатели которых не содержат...

Если в гармоническом ряде убрать члены с любым повторяющимся кортеж цифр, то преобразованный ряд станет сходящимся.

Найден эффективный алгоритм для общей проблемы – любой пропущенной строки (кортежа) цифр [17]. По данным работы [18] на рисунке 2 представлены суммы рядов Кемпнера с одной удаляемой цифрой.



0	23,103	5	21,835
1	**16,177**	6	22,206
2	19,257	7	22,493
3	20,570	8	22,726
4	21,327	9	22,921

Рис. 2. Суммы рядов Кемпнера K_d :
из гармонического ряда удалены все члены, содержащие цифру d

Как видно, из всевозможных рядов Кемпнера минимальную сумму имеет ряд $K_1 \approx 16{,}18 \approx 10 \cdot \Phi$ – увеличенная в 10 раз константа золотого сечения.

$$K_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\frac{1}{24}+\frac{1}{25}+\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\cdots \approx 16{,}18 \approx 10 \cdot \Phi .$$

Итак, налицо органичное единство двух гармоний: истонченного гармонического ряда K_1 и золотого сечения.

Гармонический ряд с золотым сечением.

Итак, гармонический ряд принципиально расходится, унося себя в неисчислимое понятие бесконечности. Несколько печальная и одновременно возвышающаяся над бренным миром участь прекрасного образа гармонии.

Но трансфинитно-бесконечная суть-сторона мировой гармонии, выражаемой через гармонический ряд, может быть ужата в финитно-конечное состояние посредством наделения её дополнительными свойствами-возможностями, которые также олицетворяют гармоническое начало. Проницательный читатель наверняка догадался, что таким катализатором или уравнителем может выступить золотая (гармоническая, божественная) пропорция.

Рассмотрим один из вариантов подобного действа на языке математики.

Используя интегральное представление $H_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}dt,\ \operatorname{Re}(x) > -1$ и вычисление интеграла [19], определим сумму ряда с гармоническими числами:

$$\sum_{n\ge 1} x^n H_n = \left\| |x|<1,\ H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt = \int_0^1 \left(1+t+\ldots+t^{n-1}\right)dt = \left(t+\frac{t^2}{2}+\ldots+\frac{t^n}{n}\right)\Bigg|_0^1 \right\| =$$

$$= \sum_{n\ge 1} x^n \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt = \int_0^1 \sum_{n\ge 1} x^n \frac{1-t^n}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{1}{1-t}\left(\sum_{n\ge 1} x^n - \sum_{n\ge 1} x^n t^n\right)dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-t}\left(\frac{x}{1-x} - \frac{xt}{1-xt}\right)dt = \frac{-1}{1-x}\int_0^1 \frac{-x\,dt}{1-xt} = \frac{-1}{1-x}\ln(1-xt)\Bigg|_{t=0}^{t=1} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

После подстановки малой константы золотого сечения $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi^{-1} \approx 0{,}618$ находим:

$$\underline{x=\phi}:\quad \sum_{n\ge 1}\phi^n H_n = -\frac{\ln(1-\phi)}{1-\phi} = 2\Phi^2 \ln\Phi \approx 2{,}5197\,;$$

$$\underline{x=\phi^2}:\quad \sum_{n\ge 1}\phi^{2n} H_n = -\frac{\ln(1-\phi^2)}{1-\phi^2} = \Phi \ln\Phi \approx 0{,}7786\,.$$

Две гармонии объединились, переплелись в одной бесконечной последовательности и образовали финитно-конечное состояние, выражаемое конечной суммой ряда.

Или другой возможный вариант:

$$-\frac{\ln(1-x)}{1-x} = \Phi \ \Rightarrow\ x \approx 0{,}531455\,.$$

Вместо заключения.

Процесс становления гармонии адекватно и в полной мере отслеживается на модельных объектах гармонического ряда и гармонически-золотой пропорции.

Их бесконечно-неторопливая поступь к аттракторам свидетельствует о том, что предустановленная гармония достигается с неимоверным трудом. Особенно в космологических масштабах.

Механизм творения-развития мира запущен давно. Впереди неизвестность.

Можно предположить, когда отношение порядка и хаоса во Вселенной достигнет "золотой" константы, мир предстанет во всей полноте совершенства и достигнет абсолютного равновесия в точке омега-бифуркации, после чего неким образом "рухнет-схлопнется" и как упорядоченное целое "развалится".

Что это будет, библейский Апокалипсис или новая точка отсчета со своим временным измерением-зазеркальем, неведомо.

Возможно, Богу самому интересно, что из этого всего получится по его плану "А".

Поживем – увидим. Хотелось бы, но увы...

Бессрочно кораблю не плыть (М.Цветаева).

Приложение

Средние величины в трапеции

Трапеция общего вида (рис. П.1) – чрезвычайно удобный геометрический объект для построения и демонстрации средних величин, зависящих от длин оснований трапеции x, y.

1) Отрезок $H = FE$, проходящий через точку пересечения диагоналей O параллельно основаниям $H \parallel x \parallel y$, – есть их *среднее гармоническое* $\frac{1}{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ или $\boldsymbol{H} = \frac{2xy}{x+y}$.

Действительно, прибавив к пропорции $\frac{FO}{x} = \frac{CO}{CB}$ одинаковые отношения $\frac{OE}{x} = \frac{FO}{y} = \frac{OB}{CB}$, получаем $\frac{FO}{x} + \frac{FO}{y} = \frac{CO}{CB} + \frac{OB}{CB} = 1$.

Разделив это равенство на величину $FO = FE/2$, находим $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{\boldsymbol{H}}$.

2) Отрезок NK, соединяющий середины боковых сторон трапеции, – есть *среднее арифметическое* $\boldsymbol{A} = (x+y)/2$. Отрезок одинаково отстоит от оснований трапеции.

3) Отложим $NL = FE$, восстановим перпендикуляр $LM \perp NK$, возьмем точку O' – середину NK и циркулем проведем $O'N = O'M$.

Полученный отрезок NM – *геометрическое среднее* $\boldsymbol{G} = \sqrt{xy}$, как катет $\Delta\, KMN$ – среднее пропорциональное гипотенузы $NK = \boldsymbol{A}$ и смежного сегмента $NL = \boldsymbol{H}$.

С целью удобства восприятия остается его расположить параллельно (знак ||) основаниям трапеции. Для этого вращением вокруг точки N он переносится на линию NK, из точки пересечения проводится линия || боковой стороне AC, и далее собственно линия-отрезок $\boldsymbol{G}$ || основанию AB.

В таком расположении отрезок делит исходную трапецию на две подобные трапеции.

4) *Контргармоническое среднее* расположено на таком же расстоянии от линии $\boldsymbol{A}$ до $\boldsymbol{H}$ (только ниже) и легко достраивается путем проведения окружности и проведения к ней касательной || основанию AB.

Действительно, при таком построении $\boldsymbol{A} = \dfrac{\boldsymbol{H}+\boldsymbol{C}}{2}$ или $\boldsymbol{C} = 2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{H} = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

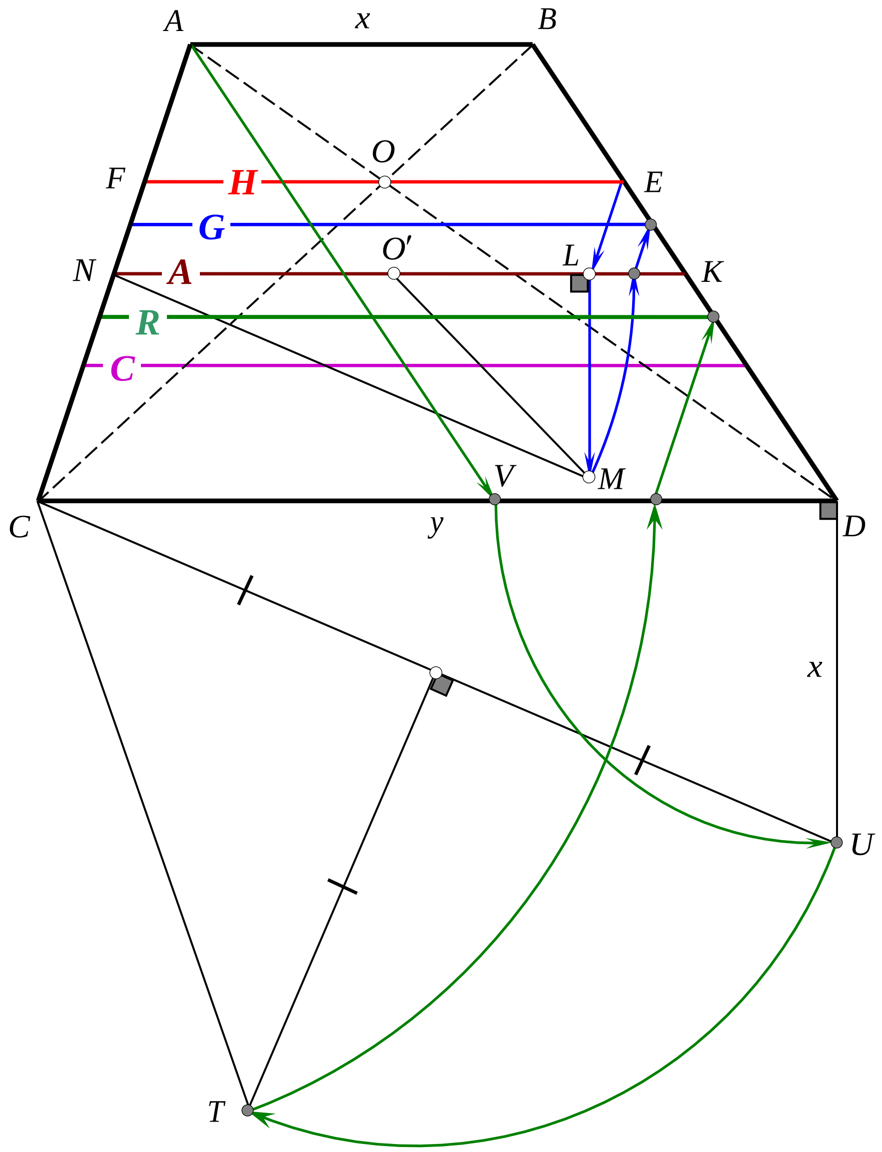


Рис. П.1. Геометрическая интерпретация наиболее распространенных средних в трапеции

5) Проводим $AV \| BD$. Радиусом $DV = x$ на перпендикуляре $DU \perp CD$ отмечаем отрезок длиной *x*. Делим гипотенузу $CU = \sqrt{x^2+y^2}$ пополам и как на диаметре проводим дугу *UT* до пересечения с перпендикуляром в точке *T*. Отрезок $CT = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} = \boldsymbol{R}$ – есть *среднеквадратическое*. Далее он легко переводится в "площадь" трапеции.

Отрезок $\boldsymbol{R}$ делит исходную трапецию на две равные по площади трапеции.

Литература:

1. Василенко С.Л. Динамическая гармония и детерминированный хаос // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24243, 03.02.2018. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163608.htm.
2. Василенко С.Л. Гармония и математика // АТ. – М.: Элю № 77-6567, публ. 23917, 04.11.2017. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163477.htm.
3. Лосев А.Ф. Гармония // БСЭ: 3-е изд. Т. 6. – М.: Изд. "Сов. энц.", 1971.
4. *Chaplin M.F.* Water structure and science / London South Bank University. – 2012. – http://www.lsbu.ac.uk/water/index2.html.
5. *Щедровицкий Г. П.* Процессы и структуры в мышлении (курс лекций) / Из архива Г.П. Щедровицкого. Т. 6. – М.: Путь, 2003. – 320 с.
6. Татур В.Ю. Гармония как принцип существования Целого // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 10167, 23.12.2002. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0019/d01/00160022.htm.
7. Тимердинг Г.Е. Золотое сечение: пер. с нем., изд. 3-е, доп.. – М.: Либроком, 2009. – 108 с.
8. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. – М.: Диля, 2006. – 366 с.
9. Корбалан Ф. Золотое сечение: математический язык красоты. – М.: DeAgostini, 2013. – 158 с.
10. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математ. и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2.
11. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17099, 13.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322080.htm.
12. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
13. Василенко С.Л. Средние значения и математические пропорции: от Античности до наших дней // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22763, 28.11.2016. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163146.htm.
14. My new favorite proof of this classic result / Michael Penn, 02.04.2024 – https://www.youtube.com/watch?v=Xb1XoJ9puiY.
15. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1981. – 718 с.
16. Sondow Jonathan, Weisstein Eric W. Harmonic Number / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/HarmonicNumber.html.
17. Schmelzer T., Baillie R. Summing a curious, slowly convergent series // The Math. Assoc. of Amer. – 2008, 115(6), 525-540.
18. Weisstein E.W. Kempner Series. / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/KempnerSeries.html.
19. Сумма ряда с гармоническими числами и золотым сечением / Hmath, 26.02.2024. – https://www.youtube.com/watch?v=YA8Z6Ik9CJY.