С.Л. Василенко

Интегральное исчисление с константой золотого сечения. Часть 3. Божий промысел тригонометрии

Бог – это абсолютный интеграл, как предел суммы
всех его бесконечных становлений (Н.Кузанский) [32]

Теистические параллели.

«Тригонометрия – душа науки и вечная истина» (Томас Пейн, Век разума, 1794).

Можно сказать, божественное провидение и сила духа, с помощью которой бог синтезировал архитектуру вселенной с её отношениями и пропорциями.

Во все времена человек пытается постигнуть устройство космоса. Главным образом на уровне идей-гипотез с преобладающим влиянием математики и астрономии. Сегодня космические структуры мыслятся, как геометрически неоднородные и фрактальные.

Николай Кузанский по праву считается крупнейшим мыслителем не только эпохи Ренессанса, но и вообще всей новой и новейшей европейской философии [32].

Яркой чертой его философии является структурно-математический метод, включающий геометрические толкования-интерпретации.

Конечный треугольник, продолженный в бесконечность, превращается в одну прямую.

Физически обозримая окружность по мере увеличения её радиуса будет всё больше и больше разгибаться. И когда радиус круга станет необозримо большим, окружность тоже превратится в прямую линию. – Таким способом Кузанский вообще доказывал, что прямая линия, треугольник, круг и шар в бесконечности совпадают и нераздельно тождественны.

Интеграл (от лат. *integralis*) буквально означает «составляющий целое». – Сравните: *integer* <*number*> – целые числа.

В широком смысле *интегральный* аспект подразумевает объединение, *синтез*.

Соответственно *дифференциальный* – фрагментацию-разделение, *анализ*.

Отсюда различают дифференциальный и интегральный подходы к изучению природы и социума. Образных представлений много, но мир един. Хотя на нашей планете он не такой уж и мирный, давно брошен создателем и превратился в большой пенитенциарий.

Из дифференциального и разделенного отображения по секторам и/или по уровням окружающий мир становится интегральным, абсолютно взаимосвязанным.

Высшим проявлением-суждением предстает интегральная дефиниция бога.

Бог Кузанского – есть предел суммы всех его бесконечных становлений, и тогда он есть, очевидно, *абсолютный интеграл*.

С такими эпитетами как беспредельность и неизмеримость, вечность и всемогущество. Абсолютность, уникальность, всереальность, полная завершенность, запредельность и т.п.

В таких исключительных категориях уже и не важно, есть ли бог на самом деле.

Можно придумать-привести дюжину доказательств, что он существует. И рядом разместить не меньше аналогичной правдоподобной аргументации, что бога нет. Ибо никакое доказательство не является рационально неизбежным и логически необходимым.

Наличие-отсутствие бога ровным счетом ничего не значит. Ибо человеческий разум здесь бессилен, и каждый принимает своё решение на веру в условиях полной неопределенности. И результат здесь один: отсутствие оного. С неортодоксальной метафорической формулой бога "0 ≡ 1" [33].

Волею исторических обстоятельств к золотой пропорции "прилип" эпитет *божественной*.

С этим можно частично согласиться, подразумевая, что золотое сечение (ЗС) или более точно *золотое отношение*, включая рост-приумножение, направлено не столько на деление, сколько на объединение отдельных составляющих в целое. Действуя как универсальный интегратор в малом и большом, включая космические масштабы. Как проявление-воплощение всемогущественной силы, исходящей от абсолютного бога-интеграла вселенной.

Именно отсюда и наш повышенный интерес к интегральному исчислению с константой золотого сечения. По правде говоря, мы толком не знаем, что из этого может или должно получиться. Но убеждены, связь «ЗС – интеграл – вселенная» существует.

Будем искать... Благо есть "крутые" аналогии: бескрылый пегас, перламутровые пуговицы (к/ф Брильянтовая рука) и др.

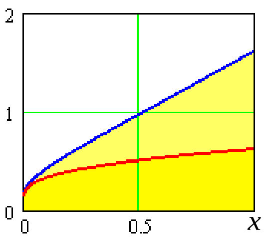
Продолжение-развитие основной темы.

Для разминки вспомним интеграл $\int_0^1 \frac{(x^a-1)^2}{\ln^2 x}dx = \sqrt{5}\ln\Phi$ из 1-й части (п. 4).

Попробуем без квадратов и по методу Лейбница-Фейнмана, который позволяет найти интеграл от некоторого параметра a и далее через него частные золотые интегралы:

$$I(a)=\int_0^1 \frac{x^a-1}{\ln x}dx, \quad I'(a)=\frac{\partial}{\partial a}I(a)=\int_0^1 \frac{x^a \ln x}{\ln x}dx=\int_0^1 x^a dx=\left.\frac{x^{a+1}}{a+1}\right|_0^1=\frac{1}{a+1};$$

$$I(a)=\int I'(a)da=\int\frac{da}{a+1}=\underline{\ln(a+1)}+C, \quad I(0)=0 \to C=0.$$



$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^\Phi-1}{\ln x}dx=\ln\Phi^2\approx 0{,}9624}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^\phi-1}{\ln x}dx=\ln\Phi\approx 0{,}4812}$$

12. Золотой угол и более глубокое погружение в золотую тему.

Ранее во второй части работы (п. 11) был представлен золотой интеграл с квадратом косинуса $\int_0^{2\pi}\frac{x}{\Phi-\cos^2 x}dx=2\pi^2$, равный площади поверхности 4-мерной единичной сферы.

Рассмотрим похожий интеграл учебного плана, в котором применяется универсальная тригонометрическая подстановка, как частный случай замены переменной, и выделение полного квадрата в знаменателе:

$$I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}=2\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\cos x}=\left| t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right|=4\int_0^{\infty}\frac{dt}{a(1+t^2)+1-t^2}=$$

$$=\frac{4}{a-1}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{a+1}{a-1}}=\frac{4}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\cdot\left.\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\right|_0^{\infty}=\frac{4}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

$$I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\sin x}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

Конечно, главным является результат. Но не менее важна и стезя, по которой идешь к этому результату. Дело даже не в сложности пути или затраченном времени. Разные подходы позволяют проследить динамику развития и внутренние механизмы рождения итоговой формулы. Лучше понять истоки произрастания «золотых колосков».

Поскольку интеграл учебный, проследим также альтернативное более экзотическое вычисление методами комплексного анализа через вычеты [34]:

$$J(a)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\cos x}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}=\left|\begin{array}{l} z=e^{ix}\,,\;\; dz=iz\,dx,\;\; \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ a+\cos x=a+\dfrac{z+1/z}{2}=\dfrac{z^2+2az+1}{2z}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{2z}{z^2+2az+1}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}f(z)dz=\frac{2\pi i}{i}\operatorname*{res}_{z_1} f(z)=$$

$$=\left|\begin{array}{l} z_1=-a+\sqrt{a^2-1},\;\; |z_1|<1 \\ z_2=-a-\sqrt{a^2-1},\;\; |z_2|>1\end{array}\right|=2\pi\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=2\pi\lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2}=\frac{2\pi}{2\sqrt{a^2-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Если не вдаваться в суть математических преобразований, а воспринимать формульную картинку целиком, как визуальный контент, то можно отметить наличие большое количество двоек. Что-то делится пополам, другое удваивается. Потом оное возводится в квадрат или извлекается квадратный корень. – Одни двойки, как в известной картине из детства «Опять двойка». Всё вместе затем суммируется, перемножается.

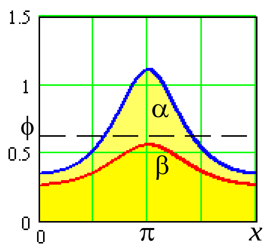
Уже это наталкивает на мысль, что где-то «бродит призрак золотого сечения».

В итоге рождается интеграл. И для этого оказывается не нужно сильно вникать во все тонкости и хитросплетения интегрирования.

Не обязательно взламывать замки. «Потренируйся лучше на кошках», – говорит персонаж кинокомедии «Ы». – Ученые тренируются на мышах.

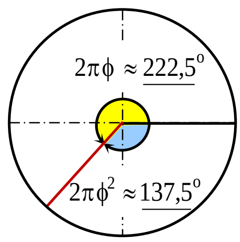
Фибоначчи выбрал гипотетических кроликов, и из этого выросла целая наука...

Представляют интерес следующие частные случаи:



$$\boxed{\alpha=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\Phi^2}+\cos x}=2\pi\phi\approx 3{,}8832}$$

$$\boxed{\beta=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\Phi^4}+\cos x}=2\pi\phi^2\approx 2{,}4000}$$



Первый интеграл численно равен золотому углу α, измеренному в положительном направлении отсчета (против часовой стрелки), как это принято в математике и физике.

Полный угол 2π (целое) так относится к золотому углу α, как он относится к углу $\beta=2\pi-\alpha$, дополняющего его до полного, образуя золотую пропорцию $\dfrac{2\pi}{\alpha}=\dfrac{\alpha}{\beta}=\Phi$.

Параметр a равен диагонали золотого прямоугольника со сторонами длиной 1 и Ф.

Отличительная особенность этой фигуры: после отрезания квадрата оставшаяся часть остается золотым прямоугольником, устойчиво сохраняя то же самое отношение геометрических размеров.

При бесконечном удалении или добавлении квадратов соответствующие углы квадратов образуют бесконечную последовательность точек на золотой спирали. Это единственная логарифмическая спираль, которая обладает указанным свойством и имеет коэффициент роста, равный Φ^4, как во втором интеграле.

Волновой периодический процесс, отображаемый синусоидой, посредством наращивания-интегрирования практически идеально разворачивается в золотую спираль, которая особенно проявляется в филлотаксисе многих растений.

Если так растут-формируются растения и многие другие живые творения, то почему бы подобному алгоритму не быть встроенным в эпицентр развития космоса? Иначе говоря, от малого к большому. – Вопрос риторический.

Во всяком случае, большое видится на расстояньи (С.Есенин, 1924). Уяснить-оценить его смысл-содержание можно лишь по прошествии некоторого времени. Почекаємо...

А пока двигаемся дальше, только теперь в дедуктивном направлении.

13. От общего к частному.

а) В работах [35, 36] приведены интегралы, которые одинаково структурированы и различаются только сменой косинуса на синус, не влияя на конечный результат:

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\cos x)}{\cos x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\sin x)}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{arsh}a,$$

где $\operatorname{arsh}a=\sinh^{-1}a=\frac{\pi}{2}\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$ – обратный гиперболический синус (ареасинус).

Замена $\sin x\leftrightarrow\cos x$ непосредственно следует из особого свойства определенных интегралов (*king's rule* – королевского правила):

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx;$$

$$\int_0^{\pi/2}f(\sin x,\cos x)dx=\int_0^{\pi/2}f[\sin(\pi/2-x),\cos(\pi/2-x)]dx=\int_0^{\pi/2}f(\cos x,\sin x)dx.$$

Оба интеграла находятся методом Лейбница-Фейнмана – дифференцированием по параметру a под знаком интеграла.

При этом M.Penn гиперболизирует свои симпатии-оценки данного подхода, называя его единственным трюком, позволяющим найти "ужасающий" на его взгляд интеграл:

$$J(c,b)=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\sqrt{c^2+t^2}}\right)}{\sqrt{c^2+t^2}}dt=\left|\begin{array}{c}t=\operatorname{arctg}x,\ a=b/c\\ c^2+t^2=c^2\sec^2x\\ dt=c\sec^2x\,dx\end{array}\right|=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\cos x)}{\cos x}dx=I(a).$$

То есть путем замены переменных он сначала преобразуется к виду $I(a)$ и далее подпадает под «трюк Фейнмана».

Что и говорить, длинновато.

"Страшненький" с виду интеграл можно найти сразу через частную производную по параметру b, буквально в две короткие строчки:

$$\frac{\partial}{\partial b}J(c,b)=\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+c^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{c^2+b^2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{c^2+b^2}}\Bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{c^2+b^2}}\,;$$

$$J(c,b)=\frac{\pi}{2}\int_0^b \frac{db}{\sqrt{c^2+b^2}}=\frac{\pi}{2}\ln\left(b+\sqrt{c^2+b^2}\right)\Bigg|_0^b=\frac{\pi}{2}\operatorname{arsh}a\,,\ \ a=\frac{b}{c}.$$

Для полноты изложения приведем выкладки из [35, 36], в которых обходным маневром с обратной заменой переменных происходит возврат к исходным пределам интегрирования от 0 до ∞:

$\underline{\cos x}$:

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\cos^2 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x+a^2}=\left|\begin{matrix}u=\operatorname{tg}x,\ \ du=\sec^2 x\,dx\\ \sec^2 x=1+u^2\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^\infty\frac{du}{1+a^2+u^2}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{1+a^2}}\Bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}};$$

$\underline{\sin x}$:

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\left(1+a^2\right)\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{\csc^2 x\,dx}{\left(1+a^2\right)+\operatorname{ctg}^2 x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\operatorname{ctg}x\\ du=-\csc^2 x\,dx\end{matrix}\right|=\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+a^2\right)+u^2}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1+a^2}}\Bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}.$$

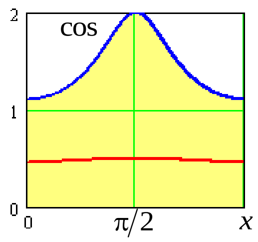
$$I(a)=\frac{\pi}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{\pi}{2}\operatorname{arsh}a+C\,,\qquad I(+0)=0\ \ \rightarrow\ \ C=0\,.$$

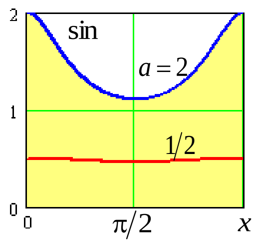
Вспоминается к/ф Айболит-66 из босоногого детства: в обход идти, понятно, не очень-то легко, но мы с пути кривого обратно не свернем. Данный пример наглядно показывает, что принятие параметров для частных производных влияет на сложность решения задачи.

Для нас более важны "знаковые" величины $a=2$ и 2^{-1}. Они связаны с традиционным построением золотого сечения на основе прямоугольного треугольника, катеты которого, значит и аргументы в тангенсах, соотносятся как 1:2.

Такой выбор для ареасинуса $\operatorname{arsh}a=\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$ и соответственно для арктангенса приводят к логарифму константы золотого сечения.

Интегралы удобнее удвоить и рассматривать на интервале от нуля до π.





$$\boxed{\int_0^\pi\frac{\operatorname{arctg}(2\cos x)}{\cos x}dx=3\pi\ln\Phi\approx 4{,}5353}$$

$$\boxed{\int_0^\pi\frac{\operatorname{arctg}(0{,}5\cos x)}{\cos x}dx=\pi\ln\Phi\approx 1{,}5118}$$

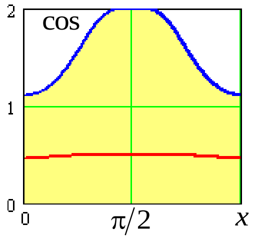
б) В развитие данной темы напомним, что во второй части (п. 6) вычислялся подобный интеграл, только с квадратом косинуса и для фиксированного параметра $a = 2$

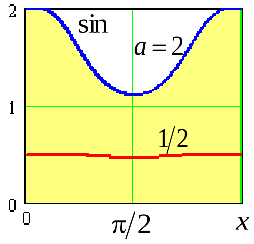
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}\left(2\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}\,dx = \pi\sqrt{\phi}\,.$$

Есть смысл перейти к более общей форме (с аналогичным доказательством)

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}\left(a\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}\left(a\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi a}{\sqrt{2+2\sqrt{1+a^2}}}$$

и получить дополнительный золотой интеграл $I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{5}}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+2\Phi}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\phi^3}\,.$





$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{arctg}\left(2\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}\,dx = 2\pi\sqrt{\phi} \approx 4{,}9395}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{arctg}\left(0{,}5\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}\,dx = \pi\sqrt{\phi^3} \approx 1{,}5264}$$

Согласно приведенному алгоритму можно находить разные интегралы, зависящие от параметра, с последующим переходом на частные золотоносные решения.

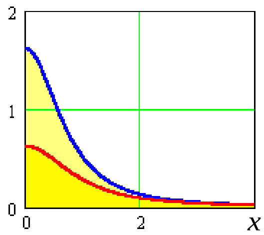
в) Например [37]:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\operatorname{tg} t}\,dt = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} t = x, \quad \sec^2 t\,dt = dx \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\left(1+x^2\right)}\,dx, \qquad \underline{I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\left(1+x^2\right)}\,dx}\,.$$

$$I'(a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x}{1+a^2x^2}\,dx = \frac{1}{1-a^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{1+a^2x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{1-a^2}\left[\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(ax)\right]\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2(1+a)};$$

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\int \frac{da}{1+a} = \frac{\pi}{2}\ln(a+1) + C, \quad I(a) = 0 \;\to\; C = 0\,.$$



$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \Phi x}{x\left(1+x^2\right)}\,dx = \pi \ln \Phi \approx 1{,}5118}$$

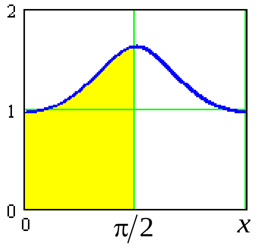
$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \phi x}{x\left(1+x^2\right)}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln \Phi \approx 0{,}7559}$$

г) $$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\left(a\cos^2 x+1\right)}{\cos^2 x}dx\ ;$$

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a\cos^2 x+1}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2 x}{a+\sec^2 x}dx=\left|\begin{matrix}u=\operatorname{tg} x\\ du=\sec^2 x\,dx\end{matrix}\right|=\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+(a+1)}=\frac{\pi}{2\sqrt{a+1}}\ ;$$

$$I(a)=\int I'(a)da=\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{\sqrt{a+1}}=\pi\sqrt{a+1}+C,\quad I(a)=0=\pi+C\ \to C=-\pi;$$

$$I(a)=\pi\left(\sqrt{a+1}-1\right).$$



$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\left(\Phi\cos^2 x+1\right)}{\cos^2 x}dx=\pi\phi\approx 1{,}9416}$$

д) $I(a)=\int\limits_0^{\infty}\frac{1-\cos ax}{x^2}dx;\ I'(a)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{\pi}{2},\quad I(a)=\frac{\pi a}{2}+C,\quad I(0)=0\quad C=0.$

14. Специальные функции – хорошие помощники.

Массачусетский технологический институт (Massachusetts Institute of Technology, MIT, Cambridge) входит в число лидеров в сфере образования, отличаясь новаторством. Например, более 40 лет проводит ежегодные соревнования по нахождению интегралов на скорость.

Так, в финале-2023 предлагался определенный интеграл $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\,dx}{(\sin x+\cos x)^2}$. На решение давалось 4 минуты. Ни один из финалистов не уложился в отведенное время.

Не беда... «Главное не победа, а участие» (П'єр де Кубертен).

В работе [38] приведено эффектное решение, которое наверняка могло бы обеспечить путь к успеху. – Но, как говорят в Украине, «дорогá крáшенка до Великодня».

Пойдем дальше и обобщим интеграл для произвольной степени $0<a<1$ тангенса:

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^a x\,dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^a x\,dx}{(1+\operatorname{tg} x)^2\cos^2 x}=\left|\begin{matrix}t=\operatorname{tg} x\\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{matrix}\right|=\int_0^{\infty}\frac{t^a\,dt}{(1+t)^2}=\mathrm{B}(1+a,1-a)=\frac{\pi a}{\sin \pi a}.$$

Здесь используется бета-функция $\mathrm{B}(x,y)$, которая связана с гамма-функцией $\Gamma(z)$ с её рекуррентным уравнением $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ и формулой дополнения $\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\pi/\sin \pi z$:

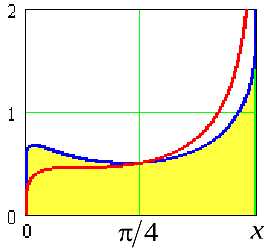
$$\left\|\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}\,dt}{(1+t)^{x+y}}=\mathrm{B}(x,y)=\left|\begin{matrix}x-1=a\\ x+y=2\end{matrix}\right|=\mathrm{B}(1+a,1-a)=\frac{\Gamma(1+a)\cdot\Gamma(1-a)}{\Gamma(2)}=\frac{a\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)}{1}=\frac{\pi a}{\sin \pi a}\right\|.$$

Остается дело за малым – подставить значение параметра a.

Самый простой ответ: $a = \frac{1}{6}$, $\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$, $I = \frac{\pi}{3}$.

Нас больше интересуют золотые интегралы, обусловленные значением синуса для аргумента, кратного 18 градусам:

Угол α, град.	18	36	54	72
a	1/10	1/5	3/10	2/5
$\sin\alpha = \sin\pi a$	$\phi/2$	$s = \sqrt{2-\phi}/2$	$\Phi/2$	$\Phi\cdot s$



$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[10]{\operatorname{tg} x}\, dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\pi}{5}\Phi \approx 1{,}0166$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[10]{\operatorname{tg}^3 x}\, dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{3\pi}{5}\phi \approx 1{,}1650$$

15. "Золото-родящий" арктангенс.

Следующий интеграл автор [39] назвал «своим любимым с арктангенсом». Поделом.

Даже переход к тангенсу приводит к простой, но трудной подынтегральной функции $u\sqrt{\operatorname{tg} u}$, тем не менее, с красивым π-"двоичным" окончанием:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x = \operatorname{tg} u \\ dx = \sec^2 u\, du = (1+x^2)du \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} u\sqrt{\operatorname{tg} u}\, du = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} + \ln 2\right) \approx 2{,}5146 .$$

Наш интерес к более общей функции, вводимой в процессе решения методом Лейбница-Фейнмана по параметру a:

$$J(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\operatorname{arctg} ax}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x = u^2 \\ dx = 2u\, du \end{array} \right| = 2\int_0^{\infty} \frac{u^2 \operatorname{arctg}(au^2)}{1+u^4} du ;$$

$$J'(a) = 2\int_0^{\infty} \frac{u^4\, du}{(1+u^4)(1+a^2u^4)} = 2\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{1}{1+a^2u^4} - \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{1}{1+u^4} - \right) du =$$

$$= \frac{1}{1-a^2}\left(2\int_0^{\infty} \frac{du}{1+a^2u^4} - 2\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^4} \right) = \frac{1}{1-a^2} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1 \right).$$

Каждый интеграл в скобках находится своей заменой переменных

$$2\int_0^{\infty} \frac{du}{1+a^2u^4} = \left| u = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} t}{a}},\ du = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sec^2 t}{2\sqrt{\operatorname{tg} t}} dt \right| = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} \cdot \frac{\sec^2 t}{\sqrt{a}\sqrt{\operatorname{tg} t}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{tg} t}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\pi/2} \cos^{1/2} t \sin^{-1/2} t\, dt = \frac{1}{2\sqrt{a}} \mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\pi}{2\sin\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\left\| 2\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \left| u=\sqrt{\operatorname{tg} t},\ du=\frac{\sec^2 t}{2\sqrt{\operatorname{tg} t}}dt \right| = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}\frac{\sec^2 t}{\sqrt{\operatorname{tg} t}}dt = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\operatorname{tg} t}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right\|$$

с использованием свойств бета-функции и её связи с другими функциями:

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}t\ \cos^{2y-1}t\,dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi z},\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin \pi/4}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$J(a)=\int J'(a)da=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)da=\left|\begin{array}{c} u=\sqrt{a} \\ 2u\,du=da\end{array}\right|=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int\frac{1-u}{1-u^4}du=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int\frac{1-u}{1-u^4}du=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{u\,du}{1+u^2}+\int\frac{du}{1+u}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg} u-\ln\sqrt{1+u^2}+\ln(1+u)\right)+C.$$

$$J(0)=0\ \to\ C=0,\qquad J(a)=\int_0^\infty\frac{u^2\operatorname{arctg}\left(a u^2\right)}{1+u^4}du=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{a}+\ln\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{1+a}}\right).$$

Частные случаи:

$$J(1)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg} 1+\ln\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\ln 2\right);$$

$$J(\Phi)=\int_0^\infty\frac{u^2\operatorname{arctg}\left(\Phi u^2\right)}{1+u^4}du=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\Phi}+\ln\left(\phi+\sqrt{\phi}\right)\right];$$

$$J(\phi)=\int_0^\infty\frac{u^2\operatorname{arctg}\left(\phi u^2\right)}{1+u^4}du=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\phi}+\ln\left(\phi+\sqrt{\phi}\right)\right].$$

С учетом формулы для разности арктангенсов $\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$ получаем любопытные закономерности:

$$J(a)-J\left(a^{-1}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{a}-\operatorname{arctg}\sqrt{a^{-1}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a^{-1}}}{2};$$

$$J\left(\Phi^2\right)-J\left(\phi^2\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Примечательным здесь является не только знаковый арктангенс – "прародитель" ЗС, но и число $\pi/\sqrt{2}$, которому равны многие интегралы, например:

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\sin x}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{1+x^4}=\int_0^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)dx\approx 2{,}2214.$$

16. От знакового интеграла к геометрии золотого сечения.

Существуют разные формы нахождения знакового интеграла Дирихле. Остановимся на технике Лейбница-Фейнмана посредством введения дополнительного параметра *a*, с последующей заменой синуса комплексной экспонентой по формуле Эйлера [40], $i=\sqrt{-1}$:

$$I(a)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx,\ \ a\ge 0;$$

$$I'(a)=-\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx=-\operatorname{Im}\int_0^\infty e^{-ax}e^{ix}\,dx=-\operatorname{Im}\int_0^\infty e^{-x(a-i)}\,dx=\operatorname{Im}\left[\frac{e^{-xa}e^{xi}}{a-i}\right]_0^\infty=$$

$$=\operatorname{Im}\frac{-1}{a-i}=-\operatorname{Im}\frac{a+i}{a^2-i^2}=-\operatorname{Im}\frac{a+i}{a^2+1}=\frac{-1}{a^2+1};$$

$$I(a)=-\int\frac{da}{a^2+1}=-\operatorname{arctg}\,a+C.$$

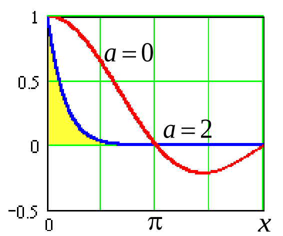
$$\lim_{a\to\infty} I(a)=0\ \ \to\ \ 0=-\frac{\pi}{2}+C,\ \ C=\frac{\pi}{2};\qquad \underline{I(a)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,a}\,.$$

Интеграл Дирихле равен $I(0)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

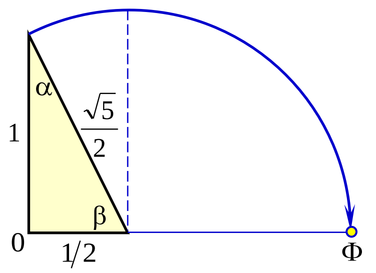
Но нас больше интересует аргумент $a=2$:

$$\alpha=I(2)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=2\cdot\operatorname{arctg}\,\phi^3.$$

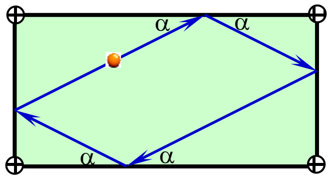
Это меньший острый угол (в радианах) прямоугольного треугольника с отношением катетов 1:2, который лежит в основе традиционного построения золотого сечения.



$$\boxed{\begin{gathered}\alpha=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}e^{-2x}dx=2\cdot\operatorname{arctg}\,\phi^3\\ \approx 0{,}4636\ \ \to\ \ 26{,}57^{\circ}\end{gathered}}$$



$$\beta=I(1/2)=\operatorname{arctg}\,2=\arcsin\left(2/\sqrt{5}\right)=\arccos\left(1/\sqrt{5}\right)$$ – угол золотого ромба.



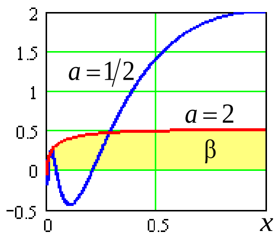
К слову, на стандартном бильярдном столе (с отношением длины и ширины 2:1) α – это угол, под которым необходимо направить шар, чтобы он ударился о четыре борта и вернулся в исходное положение. Траектория движения – параллелограмм с внутренними углами 2α и 2β.

Угол α можно также выразить в виде суммы бесконечных рядов:

$$\alpha=\frac{1}{2}\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\,2^{2k}}=\frac{2}{5}\sum_{k\ge 0}\frac{(4/5)^k}{(2k+1)\,C_{2k}^{k}}\,.$$

К интегралу $I(a)$ приводится другой внешне непохожий интеграл [41], выраженный через логарифмы $\int_0^1 \frac{\sin(\ln t)}{\ln t}dt$, или с введением дополнительного параметра a:

$$\int_0^1 \frac{\sin(1/a\cdot\ln t)}{\ln t}dt = \left| \begin{array}{c} t=e^{-ax},\ \ln t=-ax \\ dt=-ae^{-ax}dx \end{array} \right| = \int_\infty^0 \frac{\sin(-x)}{-ax}\left(-ae^{-ax}\right)dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx .$$



$$\alpha = \int_0^1 \frac{\sin(1/2\cdot\ln x)}{\ln x}dx = 0{,}4636$$

$$\beta = \int_0^1 \frac{\sin(2\cdot\ln x)}{\ln x}dx = 1{,}1072$$

17. Золотому интегралу двойки как бальзам.

Если школяру от двоек грустно, то золотому сечению – только во благо, что иллюстрирует золотой "интеграл–двоечник" [42]:

$$I = \int_1^\infty \frac{\sin^2(\ln x)}{x^2\ln^2 x}dx = \left| \begin{array}{c} \ln x=u,\ x=e^u \\ dx=e^u du \end{array} \right| = \int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{e^{2u}u^2}e^u du = |u\to x| = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx .$$

$$J(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx, \qquad J'(a)=-\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 x}{x}dx .$$

$$J''(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-ax}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\int_0^\infty e^{-ax}\cos 2x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{t}{a^2+4}\right)$$

$$\left\| \int_0^\infty e^{-ax}\cos 2x\,dx = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-ax}e^{-2ix}dx = \mathrm{Re}\left.\frac{e^{-x(a+2i)}}{-(a+2i)}\right|_0^\infty = \mathrm{Re}\frac{1}{a+2i} = \mathrm{Re}\frac{a-2i}{a^2+4} = \frac{a}{a^2+4} \right\|$$

$$J'(a)=\int J''(a)da = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a^2+4}\right)da = \frac{1}{2}\ln a - \frac{1}{4}\ln\left(a^2+4\right)+C_1 = \frac{1}{4}\ln\frac{a^2}{a^2+4}+C_1 ,$$

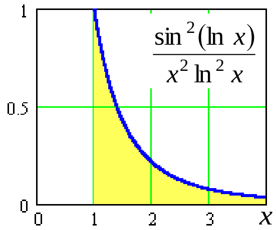
$$J'_{a\to\infty}=0, \quad \ln_{a\to\infty}\frac{a^2}{a^2+4}=\ln 1=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0.$$

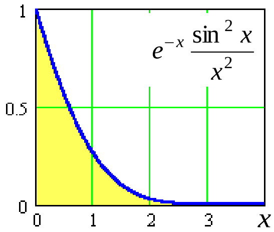
$$J(a)=\int J'(a)da = \frac{1}{4}\int\ln\frac{a^2}{a^2+4}da = \left\| \int\ln f(a)da = a\ln f(a) - \int a\frac{f'(a)}{f(a)}da \right\| =$$

$$=\frac{1}{4}\left(a\ln\frac{a^2}{a^2+4}-8\int\frac{da}{a^2+4}\right) = \frac{1}{4}a\ln\frac{a^2}{a^2+4} - \mathrm{arctg}\frac{a}{2}+C_2 ,$$

$$J(0)=\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2} \quad \to \quad C_2=\frac{\pi}{2}.$$

$$J(1)=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\ln 5}{4}+\operatorname{arctg}2=\operatorname{arctg}2-\ln\sqrt{\phi+\Phi}\,.$$





$$\boxed{\int_1^\infty\frac{\sin^2(\ln x)}{x^2\ln^2 x}dx=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx==\operatorname{arctg}2-\ln\sqrt{\phi+\Phi}\approx 0{,}7048}$$

$$\operatorname{arctg}2=\angle\beta\approx 63{,}43^{\circ}$$

18. Для золотого интеграла двоек лишних не бывает.

Автор работы [43] буквально в восторге от техники Лейбница-Фейнмана для нахождения интегралов, называя её величайшим методом интегрирования всех времен.

Наш интерес здесь более простой и расчетливый: выудить золотоносные решения.

На примере ещё одного "интеграла-двоечника", который дополнительно "усилен" двойками-параметрами $(a=2,\ 1/2)$:

а)
$$I(a)=\int_0^\infty\frac{e^{-x^2}\sin\left(ax^2\right)}{x^2}dx\,.$$

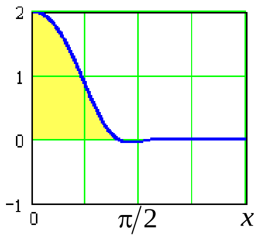
$$I'(a)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\left(ax^2\right)dx=\operatorname{Re}\int_0^\infty e^{-x^2}e^{iax^2}dx=\operatorname{Re}\int_0^\infty e^{-x^2(1-ia)}dx=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-ia}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{Re}\,(1-ia)^{-1/2}.$$

$$I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{Re}\int(1-ia)^{-1/2}da=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{Re}\frac{(1-ia)^{1/2}}{1/2\cdot(-i)}+C=\underline{\sqrt{\pi}\operatorname{Re}i\sqrt{1-ia}+C}\,;$$

$$I(0)=0\ \ \rightarrow\ 0=\sqrt{\pi}\operatorname{Re}i+C\ \rightarrow\ C=0\,.$$

$$I(2)=\sqrt{\pi}\operatorname{Re}i\sqrt{1-2i}=\sqrt{\pi}\operatorname{Re}i\left(\sqrt{\Phi}-i\sqrt{\phi}\right)=\sqrt{\pi\phi}\,;$$

$$I(1/2)=\sqrt{\pi}\operatorname{Re}i\sqrt{1-i/2}=\sqrt{\pi}\operatorname{Re}i\frac{\sqrt{\Phi^3}-i\sqrt{\phi^3}}{2}=\frac{\sqrt{\pi\phi^3}}{2}\,.$$



$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin\left(2x^2\right)}{x^2}dx=\sqrt{\pi\phi}\approx 1{,}3934}$$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin\left(x^2/2\right)}{x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi\phi^3}}{2}\approx 0{,}4306}$$

Невозможно обойти стороной и такой испещренный двойками интеграл [44], определяемый через комплексное представление синуса:

б)
$$I(a)=\int_0^\infty\frac{e^{-x^2}\sin^2\left(ax^2\right)}{x^2}dx,$$

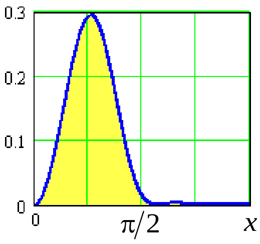
$$I'(a)=\int_0^\infty e^{-x^2}\,2\sin\left(ax^2\right)\cos\left(ax^2\right)dx=\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(2ax^2\right)dx=\left|\sin\left(2ax^2\right)=\operatorname{Im}e^{2iax^2}\right|=$$

$$=\operatorname{Im}\int_0^\infty e^{-x^2(1-2ia)}dx=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-2ia}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{Im}(1-2ia)^{-1/2};$$

$$I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{Im}\int(1-2ia)^{-1/2}da=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{Im}\frac{(1-2ia)^{1/2}}{-i}+C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{Im}i\sqrt{1-2ia}+C,$$

$$I(0)=0\ \to\ 0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}+C\ \to\ C=-\frac{\sqrt{\pi}}{2},\qquad I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\operatorname{Im}i\sqrt{1-2ia}-1\right).$$

$$I(1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\operatorname{Im}i\sqrt{1-2i}-1\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\operatorname{Im}i\left(\sqrt{\Phi}-i\sqrt{\phi}\right)-1\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\sqrt{\Phi}-1\right).$$



$$\boxed{\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}\sin^2\left(x^2\right)}{x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\sqrt{\Phi}-1\right)\approx 0{,}2411}$$

19. Три фундаментальных константы в одном золотом интеграле.

Объединение знаковых математических констант в одном тождестве, например [3, 8] $e^{i\pi}+\phi(\phi+1)=0$, – функционально совершенно, гармонично и просто красиво.

Особенно эффектно подобная связь выглядит при вычислении такого интеграла [45]:

$$I(a)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx=2\int_0^\infty\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx=2J(a).$$

$$J'(a)=\int_0^\infty\frac{-\sin(ax)x}{x^2+1}dx=-\int_0^\infty\frac{\left(x^2+1-1\right)\sin(ax)x}{x\left(x^2+1\right)}dx=-\int_0^\infty\frac{\left(x^2+1-1\right)\sin(ax)x}{x\left(x^2+1\right)}dx=$$

$$=-\int_0^\infty\frac{\left(x^2+1\right)\sin(ax)}{x\left(x^2+1\right)}dx+\int_0^\infty\frac{\sin(ax)}{x\left(x^2+1\right)}dx=-\underbrace{\int_0^\infty\frac{\sin(ax)}{ax}d(ax)}_{=\pi/2}+\int_0^\infty\frac{\sin(ax)}{x\left(x^2+1\right)}dx.$$

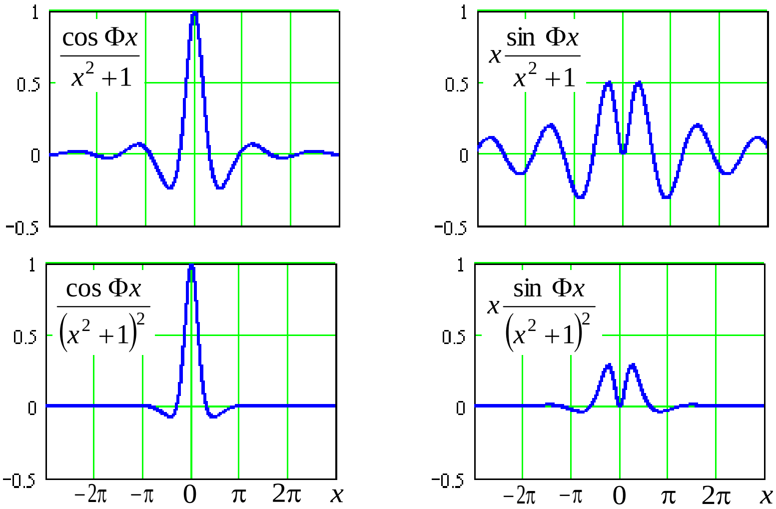
$$J''(a)=\int_0^\infty\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx=I(a)\ \to\ I(a)=C_1e^{-a}+C_2e^{a}$$

$$\begin{cases}J(0)=\int_0^\infty\dfrac{\cos(0\cdot x)}{x^2+1}dx=\dfrac{\pi}{2}=C_1+C_2\\ J'(0)=-\dfrac{\pi}{2}=-C_1+C_2\end{cases}\ \to\ \begin{array}{ll}C_1=\dfrac{\pi}{2} & J(a)=\dfrac{\pi}{2}e^{-a}\\ C_2=0 & I(a)=\pi e^{-a}\end{array}.$$

Можно показать аналогичное расширение интеграла при замене синуса на косинус, а также любопытное возведение знаменателя в квадрат

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\sin ax}{x^2+1}dx = \pi e^{-a};$$

$$I_C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Phi x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{\pi}{2}(1+\Phi)\,e^{-\Phi}; \quad I_S = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\sin \Phi x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{\pi}{2}\Phi\, e^{-\Phi} \quad \to \quad \boxed{\frac{I_C}{I_S} = \Phi}.$$



$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Phi x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{e^{\Phi}} \approx 0{,}6229}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\sin \Phi x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{e^{\Phi}} \approx 0{,}6229}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Phi x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{\pi\Phi^2}{2e^{\Phi}} \approx 0{,}8154}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\sin \Phi x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{\pi\Phi}{2e^{\Phi}} \approx 0{,}5040}$$

Примечательно, что отношение двух интегралов равно исходному параметру a исключительно для золотого сечения: $\dfrac{I_C}{I_S} = \dfrac{1+a}{a} = a \;\to\; a^2 - a - 1 = 0, \quad a = \Phi > 0$.

Не менее действенным является преобразование Лапласа $L\{f(t)\}$ через изображение функции $F(s)$ комплексной переменной s [46]:

$$F(s) = \mathrm{L}\{J(t)\} = \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\frac{\cos(tx)}{x^2+1}dx\right)dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\left(\int_0^{\infty} e^{-st}\cos(tx)dt\right)dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{s}{x^2+s^2}dx =$$

$$= \frac{s}{s^2-1}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+s^2}\right)dx = \frac{s}{s^2-1}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{x}{s}\right)_0^{\infty} = \frac{s}{s^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{s}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{s+1}.$$

$$J(t) = \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{2}\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{\pi}{2}e^{-t}.$$

Итак, семейство золотых интегралов всё более расширяется. Их изложение уже начинает напоминать интегральный сериал-калейдоскоп.

По-видимому, вызревает также вопрос их систематизации.

Дабы не переутомлять читателя монотонно-формульной однообразностью, возьмем тайм-аут или временный технологический перерыв.

Далее нас ждут не менее интересные и разнообразные по тематике золотые интегральные россыпи. – Окей!

To be continued...

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
2. Василенко С.Л. Синтез моделей "золотого сердца" и куполов на основе золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28582, 08.08.2023. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165380.htm.
3. Василенко С.Л. Базовые соотношения между фундаментальными константами // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.
4. Ramanujan S. Journal of the Indian Mathematical Society. – http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/collectedpapers/question/qJIMS.htm.
5. Hardy G.H. Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work: 3rd ed. – New York: Chelsea, 1999.
6. Weisstein E.W. Ramanujan Continued Fractions // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/RamanujanContinuedFractions.html.
7. Интеграл с золотым сечением и красивым ответом / Hmath – 28.03.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=RBLqQL9Lld4.
8. Василенко С.Л. Базовое тождество математических основ гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
10. Интеграл с арктангенсом, золотым сечением и трюком Лейбница / Hmath – 14.06.2023 – https://www.youtube.com/watch?v=kbPGwgWIksE.
11. Brown C. The natural logarithm of the golden section // The Fibonacci Quarterly, 55.5 **(**2017), 42-44. – https://www.fq.math.ca/Papers1/55-5/Brown.pdf.
12. Baxa C. Levy constants of transcendental numbers // Proc. Amer. Math. Soc. – **137** (7), 2009, 2243-2249. – https://www.ams.org/journals/proc/2009-137-07/S0002-9939-09-09787-1/S0002-9939-09-09787-1.pdf.
13. Capobianco S. Introduction to Symbolic Dynamics. Part 4: Entropy; The entropy of the golden mean shift, Institute of Cybernetics at TUT, 2010. – https://cs.ioc.ee/~silvio/slides/sd4.pdf.
14. Most beautiful integration techniques that are rare or unusual / Mathematics Mi, 02.10.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=2m1XbGhHXhY.
15. Golden integral with golden ratio / Mathematics Mi, 11.12.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=kfG8lGHbtaY.

Конец 1-й части

16. Василенко С.Л. Триномиально-квадратичный код мироздания // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15995, 12.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161675.htm.
17. A trigonometric "golden" integral / BiBenBap, 20.08.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=c6TcbpaJBM4.
18. Bhattacharjee M. Connecting φ and π // Azim Premji University. At Right Angles. Issue 12, March 2022, pp. 125-128.
19. Математика. Неопределенный интеграл. – https://math24.biz/integral.
20. WolframAlpha / Mathematics / Calculus & Analysis. – https://www.wolframalpha.com.
21. Check out the twist at the end of this integral / Michael Penn, 10.11.2023 – https://www.youtube.com/watch?v=4fqSfiHdiGo.
22. Интеграл с тангенсом, котангенсом и иррациональной степенью / Hmath, 21.06.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=n1hkREaF7EM.
23. https://www.instagram.com/p/CrRAkgUuhsM/?img_index=1.
24. Another golden integral / Dr Peyam 25.07.2018. – https://www.youtube.com/watch?v=QOJbBgvH1q4.

25. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – https://oeis.org/A094888.
26. John Baez. Pi and the Golden Ratio / Azimuth, 07.03.2017. – https://johncarlosbaez.wordpress.com/2017/03/07/pi-and-the-golden-ratio/.
27. Five, Phi and Pi in one integral / Physics Forums, 09.04.2018. – https://www.physicsforums.com/threads/five-phi-and-pi-in-one-integral-5-p.1039464/.
28. MOM. There’s a monster (integral) in the closet / Maths 505, 03.10.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=QG6o0jd-mz4.
29. Supreme golden integral / Maths 505, 20.09.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=uXHBzyypGOw.
30. An Application of a Series Expansion for (arcsinx)^2. Solution to Problem B-705, ibid., Vol. 31, No. 1 (1993), pp. 85-86. – https://www.fq.math.ca/Scanned/31-1/elementary31-1.pdf.
31. Weisstein E.W. Central Binomial Coefficient. // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/CentralBinomialCoefficient.html.

Конец 2-й части

32. Лосев А.Ф. Эстетика возрождения / Николай Кузанский. – М.: Мысль, 1978. – 624 с.
33. Василенко С.Л. Неортодоксальная метафорическая формула Бога и парадоксы веры // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26837, 17.12.2020. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164571.htm.
34. Integral of 1/(a+cos(theta)) from 0 to pi (Using Residue Theorem) / BiBenBap, 28.03.2020. – https://www.youtube.com/watch?v=ootMs7E4QaM.
35. Only Feynman's tricks can help solve this terrifying integral / Michael Penn, 12.04.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=eS8oYUgj0Xk.
36. An incredible calculus result: solution using Feynman's technique / Maths 505, 22.08.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=WLq2EThghgc.
37. Using Feynman's technique to solve this really cool Berkeley Math Tournament integral / Maths 505, 29.11.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=WbJzN1fc_CU.
38. Интеграл из финала MIT Integration Bee 2023 / Hmath – 12.03.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=OGn0oG1q3pM.
39. My favorite arctangent integral / BiBenBap, 19.03.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=K8CqCwkVxc4.
40. This famous integral is perfect for Feynman's integration technique / Maths 505, 14.05.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=4fSvflBb_3Y.
41. Solving an awesome integral using Feynman's technique / Maths 505, 22.12.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=5JprnKycMnU.
42. Feynman's technique is insanely overpowered / Maths 505, 25.05.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=_d1PJiIm-lE.
43. Feynman's technique is the greatest integration method of all time / Maths 505, 21.03.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=Xmro-XuDhOw.
44. A beautiful calculus result derived using Feynman's integration technique / Maths 505, 13.04.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=txqpIBaRgZQ.
45. Using Feynman's technique to solve for an absolutely gorgeous result! / Maths 505, 17.11.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=631elWkBn3I.
46. One of the most beautiful calculus results you'll see! Solved using the Laplace transform / Maths 505, 03.12.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=bmZoPIfZLsw.