С.Л. Василенко

Интегральное исчисление с константой золотого сечения. Часть 2. Тригонометрические функции

Интеграл по частям от гипотенузы
косинуса равен ширине красного мяча,
– проверено гуглом: решим всё!

Как-то раз внук-первокурсник привез в деревню интеграл. Конечно, несобственный, но сходящийся. Дед решал-решал, не решил. Баба брала-брала, не взяла. Пробегал мимо дифференциал, своим иксом задел, интеграл обнулился и исчез в преисподней черной дыры.

Плачет дед, плачет баба: как же нам жить-то без интеграла...

Внук утешает: не кручиньтесь. Вот вам интеграл от экспоненты, а к нему в придачу купа золотых. Радуйтесь, потешайтесь и богатейте на здоровье. С тех пор развлекаются золотыми интегралами всей деревней. Даже телешоу перестали смотреть. А в местной церквушке частенько заказывают молебны «За здравие ЗС».

Мораль притчи: не ищите прямых путей.

Общие идеи и посылы.

В первой части статьи рассмотрены определенные и неопределенные интегралы с элементарными функциями, которые содержат золотую константу в разных вариациях: пределы интегрирования, подынтегральное выражение и/или собственно решение.

В необозримом море разнообразных математических функций золотоносные интегралы занимают достаточно скромное место. Впрочем, как и сама золотая пропорция стоит особняком среди множества всевозможных математических пропорций.

Собственно в этом и заключается её настоящая уникальность, приводящая к одной из фундаментальных констант.

Практическая ценность исследуемых золотых интегралов пока остается слабо востребованной и больше носит учебно-познавательный характер.

Вместе с тем уже сейчас начинают "вызревать" общие закономерности интегрального исчисления с константой золотого сечения (ЗС).

В частности, получаемые решения указывают на преобладающую связь с числом π. – Подобно симбионтам в биологическом симбиозе с взаимно полезным мутабализмом разных числовых иррациональностей: алгебраической Φ и трансцендентной π.

Не беремся судить, какое из этих чисел является ведомым в тандеме или "притягивает" к себе другое. Но то, что они тесно взаимосвязаны посредством интегрирования, становится всё более явственным и очевидным.

Другой аспект общих закономерностей золотого интегрального исчисления обусловлен частым наличием в решениях натурального логарифма $\ln\Phi$ или $\ln\varphi$.

Именно поэтому в первой части нашей работы мы обращали внимание на то, что строгие математические взаимосвязи $F(\pi, e, \Phi) = 0$ трех фундаментальных констант можно сформировать лишь на уровне предельных процессов в виде рядов, непрерывных дробей, бесконечных сумм или интегралов.

Тогда они выглядят точно, элегантно, достоверно и теоретически осмысленно. Образуя своеобразный триномиально-квадратичный числовой код мироздания [16].

В таком контексте данные числа можно считать гилетическими согласно неоплатонической концепции А.Лосева. То есть, они не столько выражают конкретное количество, сколько обладают смысловой качественностью.

Ведь как ни крути, а числа – умозрительные образования, инспирированные человеческой фантазией. Чисто для удобства и практических соображений, как опосредованная форма отношений с окружающим миром.

С позволения сказать, они «взяты с потолка».

Ещё Аристотель аргументировано доказывал, что онтологическое утверждение о самостоятельном существовании чисел приводит к многочисленным нелепостям.

Но вернемся с философско-космических высот на нашу бренную землю и продолжим начатую тему золотого интегрирования, остановившись на тригонометрических интегралах.

Тригонометрические функции считаются элементарными.

Как и золотое сечение, они возникли исторически при рассмотрении задач, связанных с прямоугольными треугольниками. Только в силу этого обстоятельства, они просто обязаны иметь общие точки сопряжения.

Особенности интегрирования функций комплексной переменной.

Интегрирование часто упрощается с использованием комплексного анализа.

При этом нахождение золотых интегралов нередко сопровождается извлечением квадратных корней из комплексных чисел вида $\sqrt{\pm 1 \pm 2i}$.

Эти числа – предвестники золотого сечения, поскольку соотносятся с его геометрическим построением на основе прямоугольного треугольника с соотношением длин катетов $1:2$ так, что гипотенуза $\sim\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}=\phi+\Phi$, где $\Phi=\left(\sqrt{5}+1\right)/2$ – константа золотого сечения, $\phi=\Phi^{-1}=\left(\sqrt{5}-1\right)/2$.

Есть смысл найти эти корни с использованием решений биквадратных уравнений:

а) $$\sqrt{1\pm 2i}=a+ib,\qquad 1\pm 2i=a^2-b^2\pm 2abi \;\rightarrow\; a^2-b^2=1,\; ab=1,\; a^2-a^{-2}=1,$$
$$a^4-a^2-1=0 \;\rightarrow\; a=\sqrt{\Phi},\; b=a^{-1}=\sqrt{\phi},\; \underline{\sqrt{1\pm 2i}=\sqrt{\Phi}\pm i\sqrt{\phi}};$$

б) $$\sqrt{-1\pm 2i}=a+ib,\quad -1\pm 2i=a^2-b^2\pm 2abi \;\rightarrow\; a^2-b^2=-1,\; ab=1,\; a^2-a^{-2}=-1,$$
$$a^4+a^2-1=0 \;\rightarrow\; a=\sqrt{\phi},\; b=a^{-1}=\sqrt{\Phi},\; \underline{\sqrt{-1\pm 2i}=\sqrt{\phi}\pm i\sqrt{\Phi}}.$$

Напомним также некоторые формулы для вычисления вычетов – res:

1. Функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 или z_0 – устранимая особая точка для $f(z)$:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=0.$$

2. Точка z_0 – полюс 1-го порядка (простой полюс), – не обнуляет числитель $f(z)$:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

3. Функция $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z),\psi(z)$ – аналитические в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0,\; \psi(z_0)=0,\; \psi'(z_0)\neq 0$, то есть z_0 – полюс 1-го порядка:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Ну, а теперь ближе к телу <золотых интегралов>, – как говорил Мопассан (к/ф "Золотой теленок", 1968).

6. Золотые интегралы с арктангенсом.

а) Золотой интеграл равен четверти произведения констант π и ϕ.

$$\boxed{I=\int_0^\infty \frac{x^\phi \operatorname{arctg} x}{\left(1+x^\Phi\right)^2}dx=\frac{\pi\phi}{4}\approx 0{,}4854}$$

Несмотря на простой ответ, интеграл не берется известными программными средствами, поэтому для доказательства воспользуемся преобразованиями [17] и методом замены переменной:

$$I=\left|x=\frac{1}{u},\ dx=-\frac{du}{u^2}\right|=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} u^{-1}}{u^\phi\left(1+u^{-\Phi}\right)^2u^2}du=\int_0^\infty \frac{u^\phi \operatorname{arctg} u^{-1}}{u^{2\phi}\left(1+u^{-\Phi}\right)^2u^2}du=\int_0^\infty \frac{u^\phi \operatorname{arctg} u^{-1}}{\left(u^\Phi+1\right)^2}du.$$

$$2\cdot I=\int_0^\infty \frac{x^\phi \operatorname{arctg} x}{\left(1+x^\Phi\right)^2}dx+\int_0^\infty \frac{x^\phi \operatorname{arctg} x^{-1}}{\left(x^\Phi+1\right)^2}dx=\int_0^\infty \frac{x^\phi}{\left(x^\Phi+1\right)^2}\underbrace{\left(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} x^{-1}\right)}_{=\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^\phi}{\left(x^\Phi+1\right)^2}dx=$$

$$=\left|\,t=x^\Phi,\ dt=\Phi x^{\Phi-1}=\Phi x^\phi\,\right|=\frac{\pi}{2\Phi}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}dt=\frac{\pi}{2\Phi}\left(\frac{-1}{1+t}\right)_0^\infty=\frac{\pi}{2\Phi}\quad\rightarrow\quad I=\frac{\pi\phi}{4}.$$

Прекрасный результат с аналитическим решением. Особенно на фоне того, что известные специализированные программы вычисляют данный интеграл только численно.

Примечательно, что рассмотренный интеграл равен четверти площади золотого эллипса с осями длиной 1 и ϕ (рис. 6).

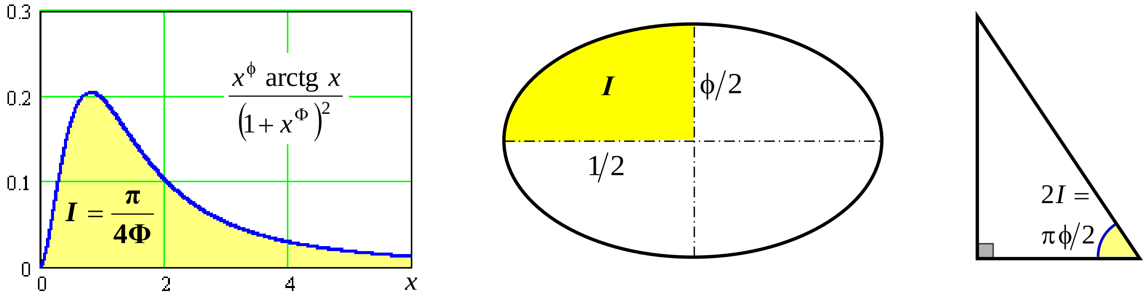


Рис. 6. Расширенная геометрия тригонометрического интеграла

Кроме того, интеграл связан с числовыми значениями гамма-функции, косинуса угла $\pi/5=36^\circ$ и угла (в радианах) треугольника

$$I=\frac{1}{8}\Gamma(0{,}3)\cdot\Gamma(0{,}7)=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{\cos\pi/5}=\frac{\pi\phi}{4};$$

$2I=\dfrac{\pi\phi}{2}\approx 0{,}9708$ – средний из трех углов (в радианах) единственного прямоугольного треугольника, углы которого находятся в геометрической прогрессии с отношением золотой константы Ф, а сами углы равны

$$\left(\phi^2,\ \phi,\ 1\right)\cdot\pi/2\approx(34.38,\ 55.62,\ 90)^\circ.$$

б) Золотой интеграл равен произведению констант π и $\sqrt{\phi}$.

В работе [18] вычислен определенный несобственный интеграл $(0, \infty)$, устанавливающий любопытную связь числа π с константой золотого сечения.

Предложенный подход довольно трудоемкий.

Поэтому сначала воспользуемся математическими сервисами Math24, WolframAlpha [19, 20] для неопределенного интеграла

$$\int \tan^{-1}\left(\frac{a}{1+x^2}\right) dx = x\tan^{-1}\left(\frac{a}{x^2+1}\right) + \frac{(a+i)\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-ia}}\right)}{\sqrt{1-ia}} + \frac{(a-i)\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+ia}}\right)}{\sqrt{1+ia}} + \text{constant}$$

$$\int \operatorname{arctg}\frac{a}{x^2+1}dx = x\operatorname{arctg}\frac{a}{x^2+1} + \frac{a+i}{\sqrt{1-i\,a}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-i\,a}} + \frac{a-i}{\sqrt{1+i\,a}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1+i\,a}} + C.$$

При $x = 0$ первообразная функция равна нулю.

При $x \to 0$ имеем:

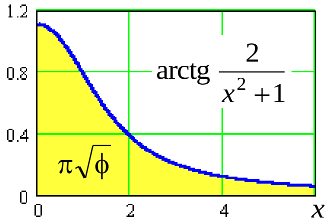
$$x\operatorname{arctg}\frac{a}{x^2+1} = x\left(\frac{a}{x^2+1}\right) - \frac{x}{3}\left(\frac{a}{x^2+1}\right)^3 + \frac{x}{5}\left(\frac{a}{x^2+1}\right)^5 - \ldots \xrightarrow[x\to\infty]{} 0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-i\,a}} = \frac{\pi}{2}.$$

С учетом пределов интегрирования и несложных преобразований с комплексными числами ($i^2 = -1$) находим:

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{a}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{a+i}{\sqrt{1-i\,a}} + \frac{a-i}{\sqrt{1+i\,a}}\right) = \pi\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{2}}.$$

Легко заметить константу золотого сечения $\phi = \Phi^{-1} = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$, если $a = 2$, то есть:



$$\boxed{\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{2}{1+x^2}dx = \pi\sqrt{\phi} \approx 2{,}4698}$$

Появление ЗС обусловлено двойкой в числителе исходного интеграла, которая здесь играет решающую роль.

По аналогии с простыми интегралами:

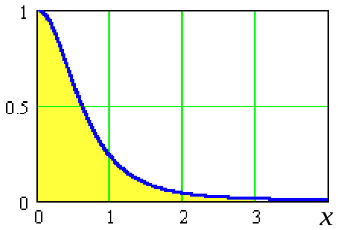
$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}+C \quad\to\quad \int_0^{1/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = 2\phi, \quad \int_0^2\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \phi - \frac{1}{2};$$

$$\int_0^2\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{3}\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^2 = \frac{4}{3}\Phi.$$

в) Модификации золотых интегралов с арктангенсом.

Андрей Ковалев (Санкт-Петербург) предложил взять разность интегралов, которые приведены в первой части 1 нашей статьи со ссылкой на справочник [9, с. 558, № 14]

$$I=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\phi x}{x\left(1+x^2\right)}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\ln\Phi\,,\qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\Phi x}{x\left(1+x^2\right)}dx=\pi\cdot\ln\Phi=2I:$$



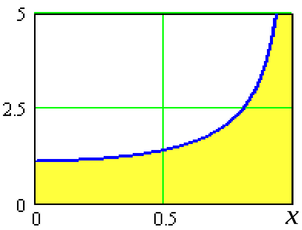
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+x^2}}{x\left(1+x^2\right)}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\ln\Phi\approx 0{,}7559}$$

Такой вариант хорошо выделяется отсутствием под знаком интеграла не только чисел ϕ,Φ, но и любой другой константы.

Он также обратил внимание на определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\left(a\sqrt{1-x^2}\right)}{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right),$$

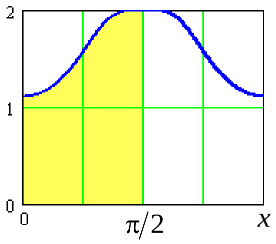
который в частном случае при $a=2$ принимает "золотоносный" вид:



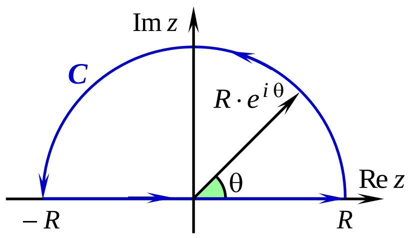
$$\boxed{\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{1-x^2}\right)}{1-x^2}dx=\frac{3\pi}{2}\ln\Phi\approx 2{,}2677}$$

Логарифм константы золотого сечения тождественно определяется через обратный гиперболический косинус (ареакосинус) $\operatorname{arch}z=\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\ \rightarrow\ \ln\Phi=\frac{1}{2}\operatorname{arch}\frac{3}{2}$.

г) Переход к контурному интегралу в комплексной области.



$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}\left(2\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}dx=\pi\sqrt{\phi}}$$



Рассмотрим интеграл [21], упростив преобразования с использованием секанса.

Решение включает: замену переменной, интегрирование по частям, расширение на комплексную область, контурный интеграл с его вычислением через вычеты – res.

В общем, целый набор красивых математических операций, каждая из которых имеет свое собственное значение в интегрировании.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}\left(2\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{array}{c} y=\dfrac{1}{2\cos^2 x}=\dfrac{\sec^2 x}{2}, \\ dy=\sec^2 x\operatorname{tg} x\,dx=2y\sqrt{2y-1}\,dx\end{array}\right|=\int_{1/2}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(1/y)}{\sqrt{2y-1}}dy=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg}(1/y) & dv=\dfrac{dy}{\sqrt{2y-1}} \\ du=\dfrac{-dy}{y^2+1} & v=\sqrt{2y-1}\end{array}\right|=\underbrace{\operatorname{arctg}(1/y)\sqrt{2y-1}\Big|_{1/2}^{\infty}}_{=0}+\int_{1/2}^{\infty}\frac{\sqrt{2y-1}}{y^2+1}dy=\int_{1/2}^{\infty}\frac{\sqrt{2y-1}}{y^2+1}dy=$$

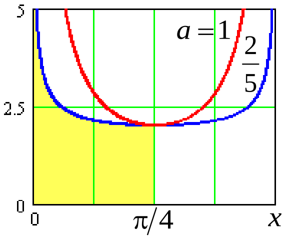
$$=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2y-1}}{y^2+1}dy=\left|z=R\cdot e^{i\theta}\right|=\operatorname{Re}\left(\oint_C\frac{\sqrt{2z-1}}{z^2+1}dz-iR\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{2R\cdot e^{i\theta}-1}}{R^2e^{2i\theta}+1}d\theta\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\left(2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=i}\frac{\sqrt{2z-1}}{z^2+1}\right)=\operatorname{Re}\left(2\pi i\cdot\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\sqrt{2z-1}}{(z-i)(z+i)}\right)=\operatorname{Re}\left(2\pi i\cdot\frac{\sqrt{2i-1}}{2i}\right)=\pi\operatorname{Re}\sqrt{2i-1}=\pi\sqrt{\phi}.$$

Как видим, арктангенс оказывается весьма продуктивной функцией-подосновой для золотых интегралов.

Наверняка, существуют и другие интересные модификации.

7. Золотой интеграл с дробным показателем степени тангенса и котангенса.



$$\boxed{\int_0^{\pi/4}\left(\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}+\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 x}\right)dx=\pi\phi\approx 1{,}9416}$$

Целесообразно решить задачу сначала в общем виде с параметром $|a|<1$ [22], и уже потом подставить конкретное значение $a=2/5$:

$$I(a)=\int_0^{\pi/4}\left(\operatorname{tg}^a x+\operatorname{ctg}^a x\right)dx=\left|\begin{array}{c} t=\operatorname{tg} x \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int_0^1\frac{t^a+t^{-a}}{1+t^2}dt=\int_0^1\left(t^a+t^{-a}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n-2}dt=$$

$$\left\|\ \sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\frac{1}{1-q},\quad q=-t^2\quad\to\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n-2}=\frac{1}{1+t^2},\ |t|<1\ \right\|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1\left(t^{2n-2+a}+t^{2n-2-a}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{t^{2n-1+a}}{2n-1+a}+\frac{t^{2n-1-a}}{2n-1-a}\right]_0^1=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1+a}+\frac{1}{2n-1-a}\right)=\frac{\pi}{2\cos(\pi a/2)}=\frac{\pi}{2}\sec\left(\frac{\pi a}{2}\right).$$

$$I\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{\pi}{2}\sec\left(\frac{\pi}{5}\right)=\pi\phi.$$

Выше применялось разложение $\dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ в сходящийся ряд из простых дробей:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)=\left|\, x=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\,\right|=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{1+a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-n}+\frac{1}{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+n}\right)=\frac{2}{1+a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{-2}{2n-1-a}+\frac{2}{2n+1+a}\right)=$$

$$=\underline{\frac{2}{1+a}-\frac{-2}{1-a}}-\underline{\frac{2}{3+a}+\frac{-2}{3-a}}+\underline{\frac{2}{5+a}-\frac{-2}{5-a}}-\frac{2}{7+a}+\ldots=\ 2I\,.$$

Не трудно заметить, что определяющим фактором «золотого блеска» стал его бессменный спутник – пятый порядок.

8. Золотые интегралы на основе свойств синуса.

В заметке [23] приведен любопытный набор определенных интегралов, в которых константа золотого сечения входит в основную функцию как составная часть.

Они следуют из общего решения ($0 < a < 1$, $b > 0$):

$$I_1(a,b)=\int_0^1 f_1(x,a,b)dx=\int_0^1\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^a\frac{dx}{1+bx}=\frac{\pi}{(1+b)^a\sin \pi a};$$

$$I_2(a,b)=\int_0^1 f_1(x,a,b)dx=\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^a\frac{dx}{(1+bx)^2}=\frac{\pi a}{(1+b)^{a+1}\sin \pi a},$$

путем подстановки $b=\Phi$ или $b=\phi$ и с учетом тождеств $1+\phi=\Phi$, $1+\Phi=\Phi^2$, $\phi=\Phi^{-1}$.

Представляют интерес величины степеней a, дающие аналитические значения синуса:

Угол α, град.	18	30	36	45	54	60	72	90
a	$1/10$	$1/6$	$1/5$	$1/4$	$3/10$	$1/3$	$2/5$	$1/2$
$\sin\alpha=\sin \pi a$	$\phi/2$	$1/2$	s	$1/\sqrt{2}$	$\Phi/2$	$\sqrt{3}/2$	$\Phi\cdot s$	1

$s=\sin 36^{\circ}=\sqrt{2-\phi}/2$.

Например (рис. 7):

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^1\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{1+\Phi x}=\phi};\qquad \boxed{\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^1\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{1+\phi x}=\sqrt{\phi}};$$

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{(1+\Phi x)^2}=\frac{\phi^3}{2}};\qquad \boxed{\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{(1+\phi x)^2}=\frac{\sqrt{\phi^3}}{2}}.$$

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^1 \frac{1}{x}\sqrt[4]{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{1+\Phi x}=\sqrt{2\phi}};\qquad \boxed{\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^1 \frac{1}{x}\sqrt[6]{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{1+\Phi x}=2\sqrt[3]{\phi}}.$$

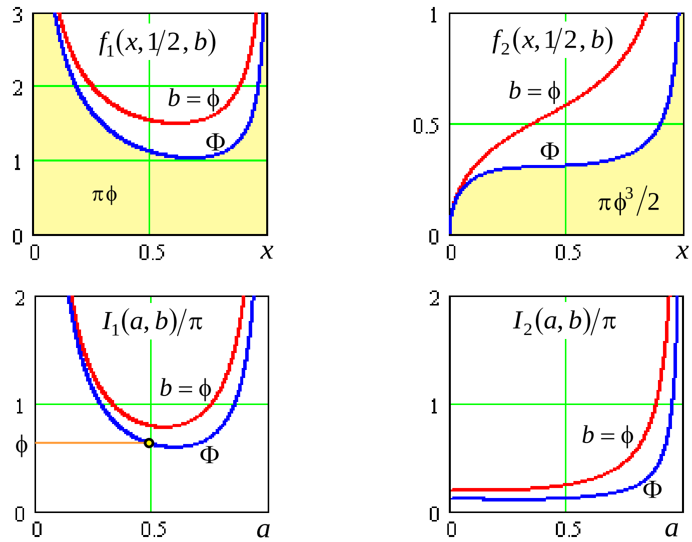


Рис. 7. Характерные изменения подынтегральной функции и золотого определенного интеграла на единичном интервале

Неопределенный интеграл в общем виде имеет весьма сложный вид.

В отдельных случаях, в частности, для квадратных корней можно вычислить через неопределенные интегралы:

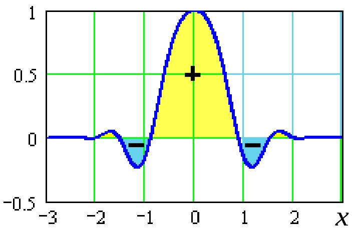
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{1+\Phi x}=i\,2\phi\cdot\operatorname{arth}\phi\sqrt{\frac{x-1}{x}}\Bigg|_0^1=0-i\,2\phi\cdot\frac{\pi}{2}i=\pi\phi;$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{(1+\Phi x)^2}=i\,\phi^3\left(\frac{\sqrt{x^2-x}}{x+\phi}+\operatorname{arth}\phi\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)\Bigg|_0^1=0-i\,\phi^3\cdot\frac{\pi}{2}i=\frac{\pi\phi^3}{2},$$

где $\operatorname{arth} z=\tanh^{-1} z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$ – обратный гиперболический тангенс (гиперболический ареа-тангенс).

9. Золотые интегралы с косинусом.

а) Небезынтересным представляется золотой интеграл с косинусом [24] на бесконечном интервале $\pm\infty$.



$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2x^2\,dx=\sqrt{\frac{\pi\Phi}{5}}\approx 1{,}0083}$$

Решение находится через комплексные переменные с оригинальным перемножением двух одинаковых интегралов:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2x^2 dx=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{i\,2x^2}\,dx=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2(-1+2i)}dx=|x\to y|=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2(-1+2i)}dy;$$

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2(-1+2i)}e^{y^2(-1+2i)}dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(x^2+y^2\right)(-1+2i)}dx\,dy=\int_{-\infty}^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1+2i)r^2}\,r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_{-\infty}^{2\pi}\left(\frac{e^{(-1+2i)r^2}}{(-1+2i)2}\right)_{r=0}^{r=\infty}d\theta=0-\int_{-\infty}^{2\pi}\frac{-1}{2(-1+2i)}d\theta=2\pi\left(\frac{-1}{2(-1+2i)}\right)=\frac{\pi}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{\pi}{5}(1+2i).$$

$$I=\sqrt{\frac{\pi}{5}}\,\mathrm{Re}\sqrt{1+2i}=\sqrt{\frac{\pi\Phi}{5}}\,.$$

Отметим, что величина $\frac{\pi\Phi}{5}$ под знаком радикала имеет разные альтернативные формы вычисления, в частности [25] используются:

- гиперболический косинус, гамма-функция, косеканс

$$\frac{\pi\Phi}{5}=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^{10}}dx=\int_0^{\infty}\frac{1+x^8}{1+x^{10}}dx=\int_0^{\infty}\frac{\cosh 4x}{\cosh 5x}dx=\frac{1}{10}\Gamma(0{,}1)\cdot\Gamma(0{,}9)=\frac{\pi}{10}\csc\frac{\pi}{10}\approx 1{,}0166\,;$$

- сумма бесконечного ряда, n = 0, 1, 2, ...

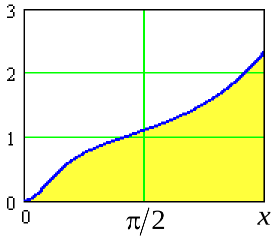
$$\frac{\pi\Phi}{5}=10\cdot\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(10n+1)(10n+9)},$$

- бесконечное произведение вложенных радикалов [26]

$$\frac{\pi\Phi}{5}=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\Phi}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\Phi}}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\Phi}}}}}\cdot\ldots$$

Последняя форма де-факто отражает последовательное приближение к числу π по аналогии с формулой Ф.Виета (1593) – первым известным явным представлением π с бесконечным числом операций. – Только подосновой теперь служит не квадрат, а вписанный в круг правильный 5-угольник, с последующим последовательным делением его сторон пополам.

б) Другой интеграл с косинусом.



$$\boxed{I=\int_0^{\pi}\frac{x^2}{\sqrt{5-2\cos x}}dx=\pi\left(\frac{5}{2}\ln^2\Phi-\mathrm{Li}_2(-\phi)\right)\approx 3{,}5220}$$

$$I=2\pi\cdot\ln^2\Phi+\frac{\pi^3}{15}$$

Здесь $\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}dt$ – дилогарифм, $\mathrm{Li}_2(-\phi) = -\frac{\pi^2}{15} + \frac{\ln^2\Phi}{2}$.

Интеграл находится через неопределенный интеграл

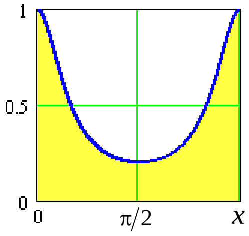
$$I = 2x\left[\mathrm{Li}_2\left(\phi e^{ix}\right) - \mathrm{Li}_2\left(\Phi e^{ix}\right)\right]_0^\pi - i\left[2\mathrm{Li}_3\left(\Phi e^{ix}\right) - 2\mathrm{Li}_3\left(\phi e^{ix}\right) + x^2\ln\frac{1-\Phi e^{ix}}{1-\phi e^{ix}}\right]_0^\pi = \begin{vmatrix} e^{i\pi} = -1 \\ e^0 = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\pi[\mathrm{Li}_2(-\phi) - \mathrm{Li}_2(-\Phi)] - i\left[2\mathrm{Li}_3(-\Phi) - 2\mathrm{Li}_3(-\phi) + \pi^2\ln\Phi\right] + i\,[2\mathrm{Li}_3(\Phi) - 2\mathrm{Li}_3(\phi)] =$$

$$= \pi\left(\frac{5}{2}\ln^2\Phi - \mathrm{Li}_2(-\phi)\right).$$

10. Золотые интегралы с квадратами синусов.

а)



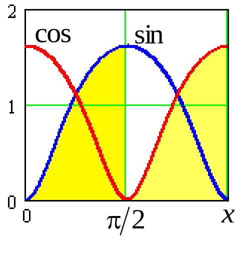
$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+4\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\phi+\Phi} \approx 1{,}4050$$

Подынтегральная функция четная относительно синуса, поэтому уменьшаем интервал интегрирования, с последующей заменой переменной через тангенс:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+4\sin^2 x} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+4\sin^2 x} = \begin{vmatrix} t = \mathrm{tg}\, x, \;\; dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin\, x = t\big/\sqrt{1+t^2} \end{vmatrix} = 2\int_0^\infty \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\dfrac{4t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+5t^2} = \frac{2}{5}\int_0^\infty \frac{dt}{1/5+t^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{5}\,t\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

б)



$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2} \ln\left(1+4\sin^2 x\right)dx \\ &\int_0^{\pi/2} \ln\left(1+4\cos^2 x\right)dx\end{aligned}\right\} = \pi\ln\Phi \approx 1{,}5118$$

Применим правило дифференцирования по параметру a под знаком интеграла.

Подход в общем виде придуман великим немецким ученым Лейбницем в 17 веке, хотя в современной англоязычной среде часто называется "трюком Фейнмана".

Эта техника интегрирования в ряде случаев упрощает вычисления, и её действительно обожал известный американский физик. – Не велика важность. Мало ли у кого какие вкусовые предпочтения.

Запишем интеграл в виде функции от параметра a и продифференцируем:

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\left(1+4\sin^2 x\right)dx \;\Rightarrow\; J(a)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(4a+4\sin^2 x\right)dx,\quad I=J\left(\frac{1}{4}\right);$$

$$J'(a)=\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\pi/2}\ln\left(4a+4\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial a}\ln\left(4a+4\sin^2 x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{a+\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2 x}{a\sec^2 x+\mathrm{tg}^2 x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{a+(a+1)\mathrm{tg}^2 x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\pi/2}\frac{d(\mathrm{tg}\ x)}{\left(\sqrt{\frac{a}{a+1}}\right)^2+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{a+1}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a+1}{a}}\ \mathrm{tg}\ x\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+t}}.$$

$$J(a)=\int J'(a)\,da=\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{\sqrt{a^2+a}}=\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{\sqrt{(a+1/2)^2-1/4}}=\begin{vmatrix}u=a+1/2\\ du=da\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1/4}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2-1/4}\right)+C=\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{1}{2}+a+\sqrt{a^2+a}\right)+C.$$

Известно, что $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\ x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$, поэтому находим

$$J(0)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(4\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\pi/2}\ln\ 4\,dx+2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\ x)\,dx=\pi\ln 2-\pi\ln 2=0\,.$$

Подставляя это нулевое значение в найденную формулу интеграла, определяем постоянную интегрирования C:

$$\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}+C=0\;\to\; C=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2};$$

$$J(a)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{1}{2}+a+\sqrt{a^2+a}\right)-\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\ln\left(1+2a+2\sqrt{a^2+a}\right).$$

Пример показывает, насколько важно помнить про аддитивную константу интегрирования для первообразной функции в неопределенном интеграле, которая может существенно повлиять на конечный результат.

Остается подставить параметр $a=1/4$, а также попутно найти интеграл при $a=4$:

$$J\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\ln\ \Phi^2=\pi\ln\ \Phi\,;$$

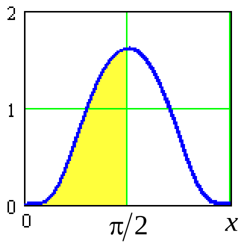
$$J(4)=\frac{\pi}{2}\ln\left(1+8+4\sqrt{5}\right)=\frac{\pi}{2}\ln\ \Phi^6=3\pi\ln\ \Phi\,.$$

Становится также понятным «главный виновник-источник торжества» появления константы золотого сечения, а именно квадрат двойки: $\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}\Rightarrow\Phi$ – согласно геометрии прямоугольного треугольника с отношением катетов $2:1$.

в) Бытует противоречивое поверье об употреблении алкоголя, что в процессе возлияния градус надо повышать, хотя в Европе обычно предпочитают обратное.

Видимо, важнее другое: для минимизации функции вреда от выпивки меньше смешивать напитки-производные из разного сырья.

Действуя по аналогии, мы оставим синус, но повысим его степень.



$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(1+4\sin^4 x\right)dx = \pi\ln\frac{\Phi+\sqrt{\Phi}}{2} \approx 1{,}1565$$

Применим формулу разности квадратов с мнимой единицей и далее способ Лейбница-Фейнмана с учетом найденного выше интеграла:

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(1+4\sin^4 x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left[\left(2\sin^2 x\right)^2 - i^2\right]dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(2\sin^2 x + i\right)dx + \int_0^{\pi/2} \ln\left(2\sin^2 x - i\right)dx\,;$$

$$J(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(2\sin^2 x + 2a\right)dx, \quad I = J\left(\frac{i}{2}\right) + J\left(-\frac{i}{2}\right);$$

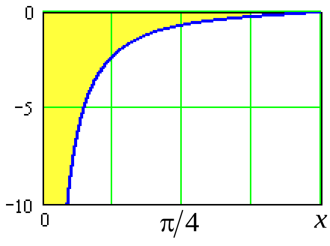
$$J'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x + a} \quad \to \quad J(a) = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{1}{2} + a + \sqrt{a^2+a}\right) + C\,.$$

При нулевом аргументе $J(0) = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$, поэтому константа $C = 0$.

$$I = J\left(\frac{i}{2}\right) + J\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{1+i+\sqrt{-1+2i}}{2}\cdot\frac{1-i+\sqrt{-1-2i}}{2}\right) = \left|\sqrt{-1\pm 2i} = \sqrt{\phi} \pm i\sqrt{\Phi}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\phi}+i\left(1+\sqrt{\Phi}\right)}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{\phi}-i\left(1+\sqrt{\Phi}\right)}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\left(1+\sqrt{\phi}\right)^2+\left(1+\sqrt{\Phi}\right)^2}{4}\right) = \pi\ln\frac{\Phi+\sqrt{\Phi}}{2}.$$

г) Интеграл с синусами и дробным показателем степени тангенса [19, 27]



$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\left(\sin^2 x\right)}{\sin 2x}\sqrt[5]{\operatorname{tg} x}\,dx = -5\pi\Phi \approx -25{,}416$$

Значение данного интеграла вытекает из общего решения, $0 < a < 2$:

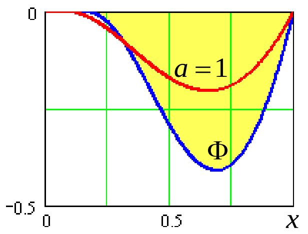
$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\left(\sin^2 x\right)}{\sin\,2x}\,\mathrm{tg}^a x\,dx=-\frac{\pi}{2}a^{-1}\csc\left(\frac{\pi}{2}a\right).$$

В частности, $I(1)=-\pi/2$, а также имеют место такие "золотоносные" значения, связанные с характерными углами в правильном пятиугольнике:

$$I\left(\frac{1}{5}\right)=-5\pi\Phi\,,\qquad I\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{5}{3}\pi\phi;$$

$$I\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{5}{2}\pi\frac{1}{\sqrt{2-\phi}}\,,\qquad I\left(\frac{4}{5}\right)=-\frac{5}{4}\pi\frac{\phi}{\sqrt{2-\phi}}\,.$$

д) Еще один «интегральный монстр» [28], решаемый методом Лейбница-Фейнмана



$$\boxed{\int_0^1\frac{x^2\sin^2\left(\ln x^{\Phi}\right)}{\ln x}dx=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{1}{1+(\Phi\cdot 2/3)^2}\approx-0{,}1929}$$

$$I(a)=\int_0^1\frac{x^2\sin^2\left(\ln x^a\right)}{\ln x}dx$$

$$I'(a)=\int_0^1 x^2\sin(2a\ln x)\,dx=\left|\begin{matrix}x=e^{-t},\;\; dx=-e^{-t}dt\\ \ln\,x=-t\end{matrix}\right|=\int_\infty^0 e^{-2t}\sin(-2at)\left(-e^{-t}\right)dt=\int_0^\infty e^{-3t}\sin(-2at)\,dt=$$

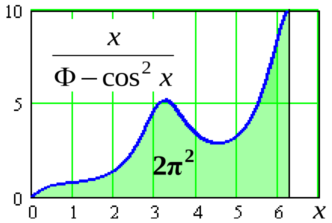
$$=\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-3t}e^{-2at\,i}\;dt=\mathrm{Im}\left.\frac{e^{-(3+2ai)t}}{-(3a+2ai)}\right|_0^\infty=\mathrm{Im}\frac{1}{3a+2ai}=\mathrm{Im}\frac{3a-2ai}{9+4a^2}=\frac{-2a}{9+4a^2}\,.$$

$$I(a)=\int\frac{-2a}{9+4a^2}da=-\frac{1}{4}\ln\left(9+4a^2\right)+C,\quad I(0)=0=-\frac{1}{4}\ln\,9+C,\quad C=\frac{1}{4}\ln\,9\,;$$

$$I(a)=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{9}{9+4a^2}=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{1}{1+(2a/3)^2}.$$

11. Золотой интеграл с интерпретацией в 4-мерном пространстве.

В работе [29] приведен интересный и приятный интеграл, в котором золотая константа неожиданно приводит к конечному результату, имеющему геометрическую интерпретацию в 4-мерном пространстве.



$$\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{x}{\Phi-\cos^2 x}dx=2\pi^2\approx 19{,}739}$$

Сначала целесообразно решить в общем виде $(\Phi \to a)$, а затем подставить число Ф:

$$I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{x}{a-\cos^2 x}dx=|x\to 2\pi-x|=\int_0^{2\pi}\frac{2\pi}{a-\cos^2 x}dx-\int_0^{2\pi}\frac{x}{a-\cos^2 x}dx=\int_0^{2\pi}\frac{2\pi}{a-\cos^2 x}dx-I=$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a-\cos^2 x}=4\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2 x}{a\sec^2 x-1}dx=4\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2 x}{a\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)-1}dx=\frac{4\pi}{\sqrt{a}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\Phi}\cdot\sec^2 x}{a-1+a\operatorname{tg}^2 x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sqrt{a}\operatorname{tg} x=u\\ \sqrt{a}\cdot\sec^2 x\cdot dx=du\end{matrix}\right|=\frac{4\pi}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\frac{du}{\sqrt{a-1}+u^2}=\frac{4\pi}{\sqrt{a}\sqrt{a-1}}\left(\frac{u}{\operatorname{arctg}\sqrt{a-1}}\right)_0^{\infty}=\frac{4\pi}{\sqrt{a\cdot(a-1)}}\frac{\pi}{2};$$

$$I(\Phi)=2\pi^2.$$

Отметим, что $2\pi^2$ – *площадь поверхности четырехмерной единичной сферы*, а её объем составляет четверть этой величины.

Уменьшенное в 10 раз значение равно [30]:

$\pi^2/5=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{2n}}{a_n}$, где L – числа Люка;

$a_n=n^2\cdot C_{2n}^n$ – числа (oeis.org/A002736) такие, что

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}=2\ln^2\Phi$, $\quad\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{\pi^2}{18}$ (Эйлер);

$C_{2n}^n=(2n)!/(n!)^2$ – центральные биномиальные коэффициенты [31].

To be continued...

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

2. Василенко С.Л. Синтез моделей "золотого сердца" и куполов на основе золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28582, 08.08.2023. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165380.htm.

3. Василенко С.Л. Базовые соотношения между фундаментальными константами // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.

4. Ramanujan S. Journal of the Indian Mathematical Society. – http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/collectedpapers/question/qJIMS.htm.

5. Hardy G.H. Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work: 3rd ed. – New York: Chelsea, 1999.

6. Weisstein E.W. Ramanujan Continued Fractions // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/RamanujanContinuedFractions.html.

7. Интеграл с золотым сечением и красивым ответом / Hmath – 28.03.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=RBLqQL9Lld4.

8. Василенко С.Л. Базовое тождество математических основ гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.

9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

10. Интеграл с арктангенсом, золотым сечением и трюком Лейбница / Hmath – 14.06.2023 – https://www.youtube.com/watch?v=kbPGwgWIksE.

11. Brown C. The natural logarithm of the golden section // The Fibonacci Quarterly, 55.5 **(**2017), 42-44. – https://www.fq.math.ca/Papers1/55-5/Brown.pdf.

12. Baxa C. Levy constants of transcendental numbers // Proc. Amer. Math. Soc. – **137** (7), 2009, 2243-2249. – https://www.ams.org/journals/proc/2009-137-07/S0002-9939-09-09787-1/S0002-9939-09-09787-1.pdf.

13. Capobianco S. Introduction to Symbolic Dynamics. Part 4: Entropy; The entropy of the golden mean shift, Institute of Cybernetics at TUT, 2010. – https://cs.ioc.ee/~silvio/slides/sd4.pdf.

14. Most beautiful integration techniques that are rare or unusual / Mathematics Mi, 02.10.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=2m1XbGhHXhY.

15. Golden integral with golden ratio / Mathematics Mi, 11.12.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=kfG8lGHbtaY.

16. Василенко С.Л. Триномиально-квадратичный код мироздания // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15995, 12.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161675.htm.

17. A trigonometric "golden" integral / BiBenBap, 20.08.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=c6TcbpaJBM4.

18. Bhattacharjee M. Connecting φ and π // Azim Premji University. At Right Angles. Issue 12, March 2022, pp. 125-128.

19. Математика. Неопределенный интеграл. – https://math24.biz/integral.

20. WolframAlpha / Mathematics / Calculus & Analysis. – https://www.wolframalpha.com.

21. Check out the twist at the end of this integral / Michael Penn, 10.11.2023 – https://www.youtube.com/watch?v=4fqSfiHdiGo.

22. Интеграл с тангенсом, котангенсом и иррациональной степенью / Hmath, 21.06.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=n1hkREaF7EM.

23. https://www.instagram.com/p/CrRAkgUuhsM/?img_index=1.

24. Another golden integral / Dr Peyam 25.07.2018. – https://www.youtube.com/watch?v=QOJbBgvH1q4.

25. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – https://oeis.org/A094888.

26. John Baez. Pi and the Golden Ratio / Azimuth, 07.03.2017. – https://johncarlosbaez.wordpress.com/2017/03/07/pi-and-the-golden-ratio/.

27. Five, Phi and Pi in one integral / Physics Forums, 09.04.2018. – https://www.physicsforums.com/threads/five-phi-and-pi-in-one-integral-5-p.1039464/.

28. MOM. There's a monster (integral) in the closet / Maths 505, 03.10.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=QG6o0jd-mz4.

29. Supreme golden integral / Maths 505, 20.09.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=uXHBzyypGOw.

30. An Application of a Series Expansion for (arcsinx)^2. Solution to Problem B-705, ibid., Vol. 31, No. 1 (1993), pp. 85-86. – https://www.fq.math.ca/Scanned/31-1/elementary31-1.pdf.

31. Weisstein E.W. Central Binomial Coefficient. // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/CentralBinomialCoefficient.html.