С.Л. Василенко

Необычная геометрическая фигура – дьявольский параболически-золотой квадрат

Люди охотнее верят в дьявола,
чем в бога и добро (Энн Райс).

Вместо вступления.

В любого бога можно верить или не верить, наличие фигуры дьявола/сатаны в его смысловой конструкции иудаизма, христианства, ислама – самоочевидно.

Для усиления подобных утверждений часто прибегают к математике, олицетворяющей авторитетно-бескомпромиссного третейского арбитра.

Но и здесь не всё бесспорно. Распутывая теологический гордиев узел, или наоборот ещё больше затягивая его, немецкий математик А.Вейль как-то с грустью отметил: «Бог существует, поскольку математика, несомненно, непротиворечива, но существует и дьявол, поскольку доказать её непротиворечивость мы не можем».

Остаются только вера и надежда. Они умирают последними.

Да и бог не бросает кости (А.Эйнштейн). – Вроде как главная магистраль развития давно предопределена программно-вселенским кодом.

Интуитивно понимаем, что слепая вера эфемерна и построена на заветных желаниях, чтобы как-то нас успокоить, утешить, обнадежить. Пусть даже простыми несбыточными обещаниями. По З.Фрейду вера – иллюзия, порожденная человеческими желаниями.

Ну, а что собственно делать? – Бог неведомо где, далеко, а дьявол всегда рядом, подстерегает на каждом шагу, намеренно путается под ногами и норовит учинить какую-нибудь скверну.

В современной жизни синонимические прилагательные чертовский, адский, дьявольский часто выступают в значении очень абстрактном, образно-гиперболическом.

Они характеризуются широкозначностью и обнаруживают аксилогическую амбивалентность, являясь источником как положительной, так и отрицательной оценочной коннотации [1]. Отличаются очень широкой сочетаемостью. Например, дьявольская красота или улыбка, дьявольский нюх, замысел, план и т.п.

«Дьявол кроется в мелочах». Он всем интересуется, постоянно обучается и совершенствуется. Сродни искусственному интеллекту (ИИ), который часто анализирует наш уважаемый коллега Андрей Никитин.

ИИ – "самозатачивающийся" инструмент, который может быть употреблен как во благо, так и во зло. Такой себе маленький бес-дьяволенок большого прогресса.

Дьявольская терминология в математике.

Дьявольские эпитеты не обошли стороной и математику с целью придания особой окраски необычным <завораживающим> объектам.

1. Так, известен пандиагональный или дьявольский магический квадрат, в котором с магической константой совпадают все суммы чисел по ломаным диагоналям (в обоих направлениях), образующимся при сворачивании квадрата в тор.

Самый ранний квадрат соотносится с обнаруженной в Индии надписью XI века:

7 12 1 14
2 13 8 11
16 3 10 5
9 6 15 4

Гармония магических квадратов поразительна, а их внутренняя красота наполнена фейерверком формально-арифметических совпадений и закономерностей, в том числе в лучах золотой пропорции [2].

2. Функцию Кантора фрактального типа называют лестницей дьявола за то, что она монотонная, не является константой, но почти во всех точках имеет производную, равную нулю [3]. Подобный фрактал, свойственен нелинейным динамическим системам, в которых изменение любой части может повлиять на поведение всей системы. Воистину, дьявол кроется в деталях.

3. Кривая дьявола в геометрии [4] определяется декартовым уравнением четвертого порядка $y^4 - a^2y^2 = x^4 - b^2x^2$. По некоторым данным, изначально появилась в Китае (12 век, китайский йо-йо). В Европе изучалась Г.Крамером (1750).

4. Демоническая композиция (demonic composition) – операция над бинарными отношениями. В отличие от обычного состава отношений, данная операция не является ассоциативной, то есть не выполняется сочетательный закон умножения $(x \circ y) \circ z \neq x \circ (y \circ z)$. Характерный пример – многократное возведение в степень, которое напрямую зависит от расстановки скобок.

5. Калькулятор дьявола (Devil's calculator, a math puzzle game) – сложная и по-настоящему веселая и приятная современная математическая игра-головоломка, которая посвящена большущему популяризатору науки, американскому писателю М.Гарднеру.

6. Словосочетание «математика дьявола» применяется, когда нет хорошего выбора, а принятие решения вынужденно требует причинить вред небольшой группе, чтобы спасти большую. Используется во время войны, при корпоративных увольнениях и т.п., когда происходит балансировка между нуждами многих и потребностями немногих.

7. Расходящиеся ряды (последовательность частичных сумм не сходится) – изобретение дьявола (Н.Абель), вносят сумятицу в умы многих математиков. Например, отойдя от традиционного способа вычисления бесконечных последовательностей, Рамануджан показал, что сумма бесконечного натурального ряда может стремиться не к бесконечности, а к значению –1/12. Проблема и кажущийся парадокс обусловлены дискретным характером частичных сумм, которые имеют разрывы I рода (скачков функции). Объяснение, почему такое происходит, можно найти в работе всемирно известного английского математика Г.Харди [5, с. 410] на основе строгой формулы суммирования Эйлера-Маклорена, чисел Бернулли и аналитического представления дзета-функции Римана $\zeta(s)$.

Члены высшего порядка, как и положено, положительные и растут квадратичным образом. Но в бесконечной сумме также "притаился" отрицательный постоянный член более низкого порядка, равный – 1/12. Вот он и выскакивает из бесконечности при математических преобразованиях, как черт из табакерки с дьявольским хохотом.

Проследим его «прыжок из космоса без парашюта»:

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots$ – сумма натурального ряда.

$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1/2$ (сглаженная сумма или суммирование Рамануджана).

$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$

Сложим последний ряд с таким же, но со смещением вправо:

$2S_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = S_1 = 1/2$ или $S_2 = 1/4$.

$S - S_2 = 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \ldots = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots) = 4S$.

$3S = -S_2 \;\; \rightarrow \;\; \underline{\mathbf{S = -1/12}}$.

Конечно, это не сумма ряда в обычном понимании. То есть частичные суммы не сходятся к этому значению. Но вещь весьма полезная. В частности, находит применение при перенормировке в квантовой теории поля.

The devil is not so black as he is painted. – Не так страшен черт, как его малюют.

Божественное и дьявольское.

Если исходить из того, что бог и дьявол – вымышленные мифологизированные персонажи древних суеверий, то связка «бог–дьявол» составляют единство или объединение всех разделений, а дьявол – буквально дробление (фрагментацию) внутри бога, везде, где только может. С примерными обратными пропорциональными формами-зависимостями:

дьявол = 1/сознание; бог = 1/дьявол.

Или в виде общей пропорции: Б/Д = Д/С.

Числом зверя и антихриста обычно считают 666. По другим манускриптам – 616.

Строго говоря, ни то, ни другое не является абсолютно верным, поскольку во времена написания Апокалипсиса не существовало десятичной позиционной системы счисления.

Числа передавались буквами. Например, hi – 600, yota – 10, числовая digamma – 6.

При переводе на разные языки и/или переписывании могли вкрадываться ошибки.

Оставим этот вопрос для профессиональных исследователей.

Отметим другое. Тысяча в Писании обычно символизирует не конкретную числовую величину, а некоторое очень большое совершенное множество.

Тогда 666, как часть тысячи, дает представление о количественной мере и модели «две трети», а 616 – скрывает за собой осознанно или безотчетно ... золотое сечение.

Так или иначе, имеет место встроенное отношение 2/3 либо ~0,618, за которое бескомпромиссно сражается дьявол и которого хочет достичь, чтобы превалировать (доминировать) и господствовать над ситуацией.

Золотая пропорция часто ассоциируется с гармонией в естественных и искусственных формах, с абстрактными идеями красоты и совершенства.

По Платону достигается ощущение «наиболее совершенного единого целого».

С легкой руки итальянца Луки Пачоли она иногда именуется божественной. Придуманная им аргументация звучит красочно, выразительно, но с явно подчеркнутым теологическим наслоением согласно христианской религии [6].

Вся божественность «притянута за уши» и сводится к обычному делению прямой линии в среднем и крайнем отношении в полном соответствии с "Началами" древнегреческого ученого Евклида. Причем на конкретном единичном примере с целым числом 10 и его частями √125 – 5, 15 – √125, заимствованного у арабских математиков конца первого тысячелетия с их монотеистическим исламом. Некоторые авторы пошли ещё дальше.

В их интерпретациях божественная "дивина" (Divina) исходит из славянского, русского и православного вектора развития цивилизации, что никак не согласуется ни с датами-сроками, ни с формой-содержанием в развитии древней пропорции.

Поскольку божественность золотого сечения терминологически-искусственная, в равной степени в нём можно поискать что-нибудь дьявольски-бесовское, – по формально-числовым проявлениям, например, числа со звериным эпитетом – 666.

Исходя из тригонометрических свойств в золотом треугольнике $\sin 54^{o} = \cos 36^{o} = \Phi/2$, в работе [7] представлены соотношения, включающие число зверя 666 и константу золотого сечения $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$:

$$\sin 666^{o} = -\Phi/2 \qquad \leftarrow \qquad \sin 666^{o} = \sin\,(720-54)^{o} = \sin\,(-54)^{o};$$

$$\cos(6\cdot 6\cdot 6)^{o} = -\Phi/2 \qquad \leftarrow \qquad \cos\,(6\cdot 6\cdot 6)^{o} = \cos 216^{o} = -\cos 36^{o};$$

$$\sin 666^{o} + \cos\,(6\cdot 6\cdot 6)^{o} = -\Phi\,.$$

Поскольку $6^{6^{6}} = 216 \bmod 360$, то $\cos\left(6^{6^{6}}\right)^{o} = -\Phi/2$.

Исходя из формул для суммы синусов и суммы косинусов углов, с учетом значений $\cos 60^{\circ} = \sin 30^{\circ} = 1/2$ имеем такие равенства:

$$\alpha + \beta = 120 \;\;\rightarrow\;\; \cos\alpha + \cos\beta = \cos(60 - \alpha) = \cos(60 - \beta);$$
$$\alpha + \beta = 60 \;\;\rightarrow\;\; \sin\alpha + \sin\beta = \sin(60 + \alpha) = \sin(60 + \beta).$$

Подставляя в них $\beta = 66^{\circ}$ и выполнив приведение углов, находим:

$$\cos 6^{\circ} + \cos 66^{\circ} = \cos 666^{\circ};$$
$$\sin 6^{\circ} + \sin 66^{\circ} = \sin 666^{\circ};$$
$$\mathrm{tg}\, 666^{\circ} \cdot \mathrm{tg}\,(6 \cdot 6 \cdot 6)^{\circ} = -1.$$

Золотая табакерка.

Известный фразеологизм «Как черт из табакерки» означает что-то внезапное, неожиданное, непредсказуемое, непредвиденное.

Своим появление он обязан шуточной игрушке (розыгрышу) в виде небольшой коробочки, чаще в форме табакерки, при открытии которой выскакивает фигурка чертика на пружине, да ещё и со звуковым оформлением в виде хохота.

В фильме "Бриллиантовая рука" именно такая табакерка была подарена управдому.

Выражение также обозначает что-то недоброе, нехорошее, нежданно-негаданно, что человека не порадует. Сегодня это боевые ракеты, которые выскакивают как черти из табакерки и падают на мирные города. Поразительно, но часть высокопоставленных церковно-православных иерархов выступают с оправданием и поощрением войны.

Константа золотого сечения (ЗС) $\Phi = \phi^{-1} = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ – целое алгебраическое число, как корень квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$ с целочисленными коэффициентами.

Отсюда возникают разные тождественно-связующие модификации.

Так, в работах [8, 9] исследована геометрическая взаимосвязь двух замечательных математических объектов: параболы и золотого сечения. Их отличие: оригинальные результаты, красивые наблюдения, простота. Золотая пропорция обладает свойствами геометрической прогрессии и одновременно отвечает закону x^2. Именно поэтому она присутствует в геометрическом решении задачи: «парабола + прямая».

Существует аналогичная взаимосвязь на основе гипербол [10, 11] и др. Константы ЗС могут быть причудливым образом "зашифрованы" в других математических формах.

1) Например, в алгебраическом уравнении

$$\sqrt{1 - 1/x} + \sqrt{x - 1/x} = x$$

или в новых обозначениях $u^2 = 1 - \dfrac{1}{x}$, $v^2 = x - \dfrac{1}{x}$, $u + v = x$,

найдем и преобразуем разность квадратов:

$$u^2 - v^2 = 1 - x,\;\; (u - v)(u + v) = (u - v)x = 1 - x \;\;\rightarrow\;\; u - v = \frac{1 - x}{x} = \frac{1}{x} - x.$$

Избавившись от переменной u, получаем:

$$x - v - v = -u^2 = -v^2 - 1 + x, \quad v^2 - 2v + 1, \quad v = 1,$$
$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1, \quad x^2 - x - 1 = 0, \quad x = (\Phi, -\phi).$$

2) Задана система уравнений $\begin{cases} x + y^{-1} = k, \\ y + z^{-1} = k, \\ z + x^{-1} = k. \end{cases}$

Выражения цикличны, система симметрична, значит $x + y = z$.

$$a^2 - ak + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2};$$

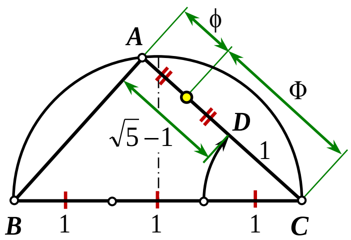
$$\underline{k = 3}: \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\Phi^2, \phi^2\right); \qquad \underline{k = -3}: \quad a = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(-\Phi^2, -\phi^2\right).$$

3) Обычно геометрические построения золотого сечения исходят из теоремы Пифагора для целочисленных отрезков:

$$\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \phi + \Phi.$$

Можно выполнить и другое построение, также в целых числах, на основе равенства

$$\sqrt{5} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \phi + \Phi:$$



- делим диаметр полуокружности на 3 равные части длиной 1;
- радиусом равным 2 отмечаем на полуокружности точку A;
- на отрезке $AC = \sqrt{5}$ откладываем $CD = 1$;
- делим отрезок $AD = \sqrt{5} - 1$ пополам и получаем $\phi = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Оставшаяся часть равна $\Phi = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

4) $4^x - 25^x = 10^x$. Разделив на 25^x: $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ и обозначив $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$, решаем квадратное уравнение $t^2 - t - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \Phi, \quad x \ln\frac{2}{5} = \ln\Phi, \quad x = \dfrac{\ln\Phi}{\ln(2/5)}$.

5) $16^x + 20^x = 25^x$. Разделив на 25^x: $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ и обозначив $t = \left(\frac{4}{5}\right)^x > 0$, решаем квадратное уравнение $t^2 + t - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \phi, \quad x \ln\frac{4}{5} = \ln\phi, \quad x = \dfrac{\ln\phi}{\ln(4/5)}$.

ЗС как пересечение прямой и кривой второго порядка.

Решение традиционного квадратного уравнения золотого сечения $x^2 \pm x - 1 = 0$ или $x^2 = x + 1$ графически представляет пересечением параболы x^2 и прямых $\pm x + 1$ (рис. 2).

Разделив на x, получаем $x \pm 1 = \dfrac{1}{x}$, с аналогичным пересечением гиперболы (в виде двух ветвей) и прямых $x \pm 1$ (рис. 2), как следствие золотой пропорции $\dfrac{x \pm 1}{1} = \dfrac{1}{x}$.

Это обычное представление, непосредственно вытекающее из алгебраического уравнения ЗС.

Есть ли другие варианты? – Оказывается, да. Причем весьма любопытные, – путем построение парабол, вытянутых вдоль разных осей координат. Но всё по порядку.

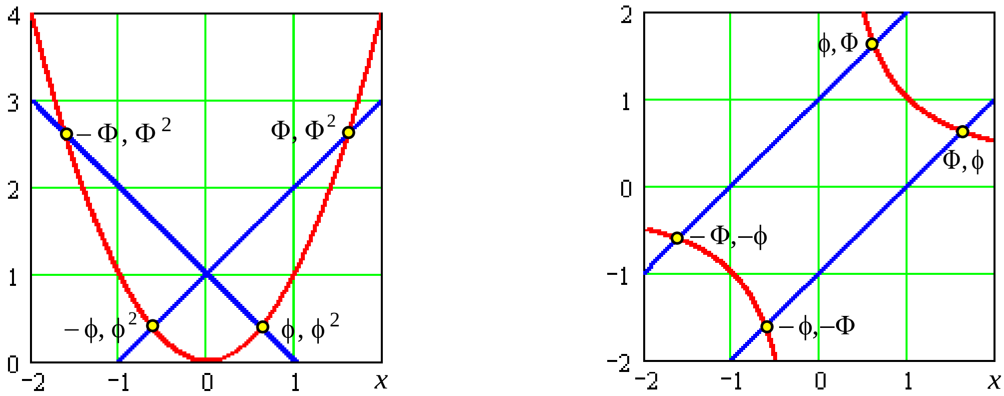


Рис. 2. Константы золотого сечения, как координаты пересечения алгебраических кривых:
а) прямые – парабола; б) прямые – гипербола

ЗС как пересечение парабол.

Рассмотрим уравнение $x^2 = c + \sqrt{c+x}$, где $c \ge 0$ – целое неотрицательное число.
Обозначим $y = \sqrt{c+x} \;\to\; y^2 = c + x,\; x^2 = c + y$.
То есть, имеем две параболы $x = y^2 - c$ и $y = x^2 - c$, которые пересекаются в 4 точках.
Разность квадратов $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = -(y-x)$ дает искомые 4 решения:

- $y - x = 0,\; x = \sqrt{c+x}, \qquad x^2 - x - c = 0, \qquad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{4c+1}}{2};$
- $y + x = -1,\; (x+1)^2 = c + x,\; x^2 + x + 1 - c = 0,\; x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4c-3}}{2}.$

Изменяя значение параметра c, легко увидеть появление квадратного корня из пяти, а за ним и констант золотого сечения (рис. 3):

$$\underline{c=1}: \;\to\; x_1 = 0,\; x_2 = -1,\; x_3 = \Phi,\; x_1 = -\phi;$$
$$\underline{c=2}: \;\to\; x_1 = \phi,\; x_2 = -\Phi,\; x_3 = 2,\; x_1 = -1.$$

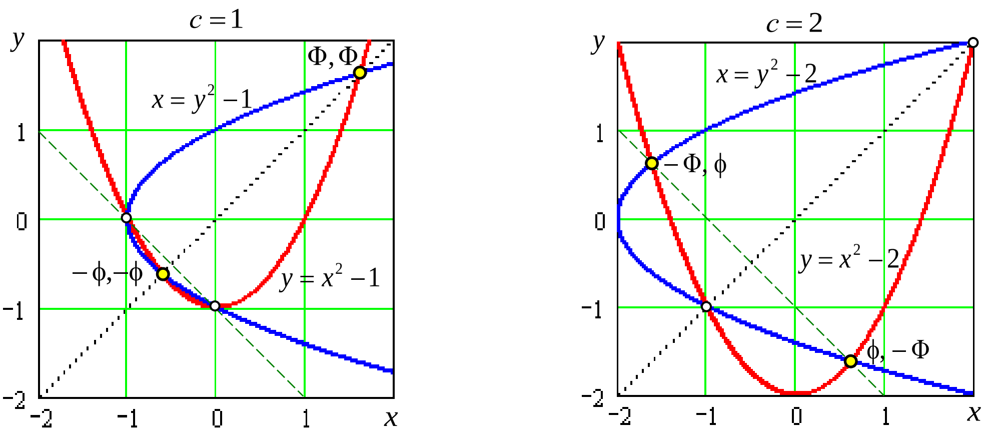


Рис. 3. Константы золотого сечения, как координаты пересечения двух парабол

Таким образом, сдвиг парабол по осям на 1 или 2 единицы в результате приводит к золотым константам в точках пересечения кривых.

Подобные решения можно получить, рассматривая пару зеркальных отражений $x = -(y^2 - c)$ и $y = -(x^2 - c)$.

Совместив четыре формы, приходим к изображениям, представленным на рис. 4–5.

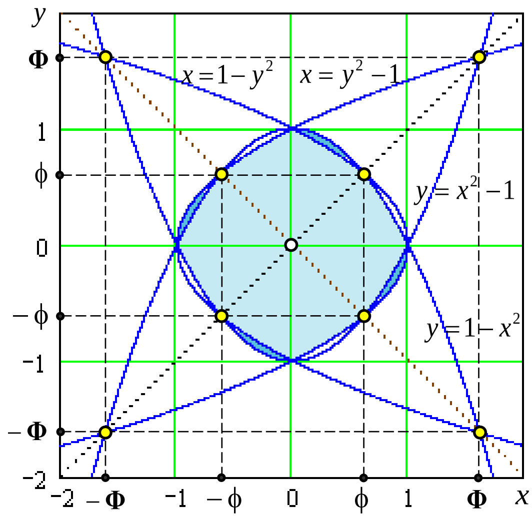


Рис. 4. Малый дьявольский параболически-золотой квадрат: площадь *s* = 2,666666...

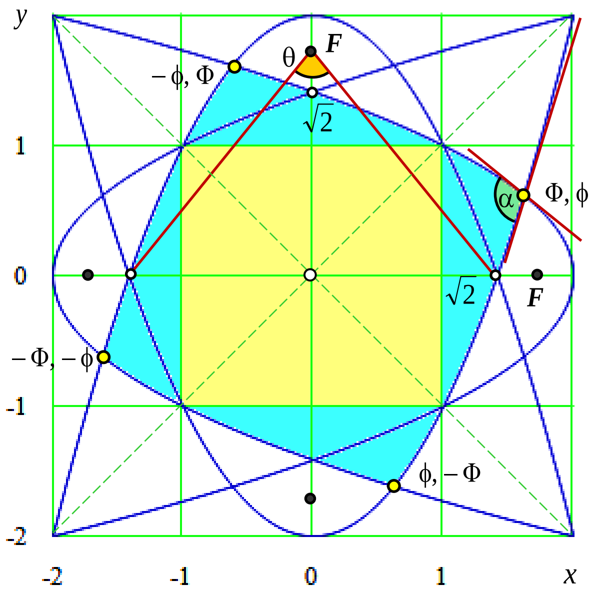


Рис. 5. Большой дьявольский параболически-золотой квадрат: площадь *S* = 6,666666...

Выделим криволинейные квадраты – область, ограниченную четырьмя одинаковыми дугами четырех парабол

$$y = \pm(x^2 - c), \;\; x = \pm(y^2 - c).$$

Вершины первого параболического квадрата расположены в точках с координатами $(\pm 1, \pm 1)$, а середины его сторон – в точках $(\pm\phi, \pm\phi)$, вершины второго квадрата – в точках $(\pm\phi, \pm\Phi)$ с разной сочетаемостью констант золотого сечения.

Площадь малого криволинейного квадрата:

$$s = 4\cdot\int_0^1 \left(1-x^2\right)dx = 4\cdot\left(x-\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = 4\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} = 2{,}666666\ldots \text{ ед.}^2$$

Найдем площадь одного из четырех криволинейных треугольников (синих), например правого, ограниченного кривыми $\sqrt{2-x}$ и x^2+2 в интервале $1\le x\le\Phi$:

$$\hat{s} = \int_1^\Phi \left(\sqrt{2-x}-x^2+2\right)dx = \frac{1}{3}\left(-x^3+6x-2\sqrt{(2-x)^3}\right)_1^\Phi = \frac{1}{3}\left(-\Phi^3+6\Phi-2\sqrt{(2-\Phi)^3}-1+6-2\right) = \frac{2}{3}.$$

Площадь четырех таких треугольников равна $s = 4\cdot\hat{s} = 8/3 = 2{,}666666...$ и совпадает с площадью параболически-золотого квадрата (c = 1) на рисунке 4.

Общая площадь параболически-золотого квадрата (c = 2) равна s плюс площадь четырех квадратиков 1×1:

$$S = s+4 = 20/3 = 6{,}666666...\text{ед.}^2$$

Не число, а сплошной дьявольский золотой Клондайк-полигон.

Дадим название полученным фигурам:

«дьявольские параболически-золотые квадраты».

Соответственно малый s = 2,666666... и большой $S = s + 4$ = 6,666666...

Для тех, кто имеет устойчивое предубеждение к дьявольщине или нечистой силе и предвзято соотносит беды нашего мира с числом 666, назовем сокращенно D-квадраты.

Периметры параболически-золотых D-квадратов (дуга параболы $y = x^2-1$, $y' = 2x$):

$$l = 4\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\;dx = 4\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\;dx = \left(2x\sqrt{1+4x^2}+\sinh^{-1}2x\right)_0^1 = 2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \approx 5{,}9158;$$

$$L = 4\int_\phi^\Phi \sqrt{1+4x^2}\;dx = \left(2x\sqrt{1+4x^2}+\sinh^{-1}2x\right)_\phi^\Phi = $$
$$= 2\Phi\sqrt{1+4\Phi^2}-2\phi\sqrt{1+4\phi^2}+\ln\frac{2\Phi+\sqrt{1+4\Phi^2}}{2\phi+\sqrt{1+4\phi^2}} \approx 9{,}8472;$$

где $\sinh^{-1}z = \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$ – ареасинус (обратный гиперболический синус).

Рассмотрим несколько подробнее большой D-квадрат.

На удивление, каких-либо отличительных проявлений рационального числа $20/3 = 6{,}666666...$ в математике мы не находим. Но есть примеры генерирования набора самих цифр-чисел с помощью математических операций, в том числе:

- производящая функция $G(x) = \dfrac{6}{1-x}$ – многочлен, коэффициенты которого равны 6;

- производящая функция $G(x) = \dfrac{(1+x)(1+2x)}{1-x}$ генерирует шестерки для $n \geq 2$;

- непрерывная (цепная дробь) для корня $\sqrt{10} = \sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{2}(\phi + \Phi)$ – диагонали квадрата со стороной $\phi + \Phi$:

$$\alpha = 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}} = [6; (6)] = 3 + \sqrt{10} = 6{,}16228\ldots$$

Действительно,

$$\beta = \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ldots}} = 6 + \frac{1}{\beta} \rightarrow \beta^2 - 6\beta - 1 = 0, \quad \beta = 3 + \sqrt{10};$$

$$\alpha = 6 + \frac{1}{\sqrt{10} + 3} = 6 + \frac{\sqrt{10} - 3}{10 - 9} == 3 + \sqrt{10}.$$

Цепная дробь периодична (то есть последовательность её элементов, начиная с некоторого места, повторяет себя) тогда и только тогда, когда число, представленное этой дробью – квадратическая иррациональность вида $a + b\sqrt{c}$ [12, с. 19].

- бесконечная последовательность шестерок образуется по итерационной формуле

$$6\,6\,6\,6\,6\,6\ldots = a_n - a_{n-1},$$

где $a_n = \operatorname{floor} \dfrac{1}{-n + \csc 1/n}$, $\operatorname{floor}(\cdot)$ – округление аргумента вниз, до ближайшего целого числа, $\csc(\cdot)$ – косеканс угла – отношение гипотенузы к противолежащему катету;

- показатель адиабаты (коэффициент Пуассона) для одноатомного идеального газа (три степени свободы) равен $\gamma = 5/3 = 1{,}666666\ldots$;

- 7-адическое число минус единицы $-1 = \ldots 666666 = (6)_7$;

- для правильного n-угольника P_n максимальное "число поцелуев" (*kissing number*) $k(P_n)$ составляет [13] $k(P_3) = 12$, $k(P_4) = 8$, $k(P_n) = \mathbf{6}$, $n \geq 5$ – количество конгруэнтных копий P_n, которые могут касаться ("целоваться") P_n, но никакие два из них не пересекаются.

Он равновелик обычному квадрату со стороной $\sqrt{20/3} \approx 2{,}5820$.

Сторона $L/4 \approx 2{,}4616$ незначительно (на одну сотую) больше метрического расстояния между золотыми точками:

$$\sqrt{(\Phi + \phi)^2 + (\Phi - \phi)^2} = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \approx 2{,}4495.$$

Диагональ равна $d = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{12} \approx 3{,}4641$.

Другое знаменательное число 12, которое детально описано в цикле наших статей [14].

Свойства квадратного корня из 12 также проявляются в ряде геометрических форм:

$\sqrt{12}+3$ – отношение радиусов трех одинаковых взаимно касающихся кругов к радиусу их внутреннего круга;

$\sqrt{12}-3$ – площадь наибольшего правильного треугольника, который может быть вписан в единичный квадрат 1×1;

$\sqrt{12}$ – площадь поверхности правильного октаэдра (8 граней) с ребром = 1;

$\sqrt{12}$ – удвоенная площадь поверхности правильного тетраэдра (4 грани) с ребром = 1.

Расстояние между точкой $\sqrt{2}$ и фокусом параболы F составляет (см. рис. 5):

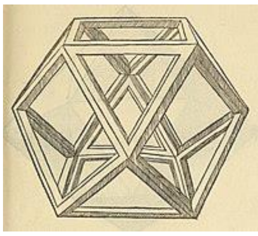
$$\sqrt{2+\left(\frac{7}{4}\right)^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{0{,}666666\ldots}\right)^2;$$

соответствующий угол θ при вершине F равнобедренного треугольника равен

$$\theta=2\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{4\sqrt{2}}{7}=4\cdot\arcsin\frac{1}{3}=2\pi-8\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}=1{,}3593476\ldots\approx 77{,}88^{\circ}.$$

Данный угол θ характерен для кубооктаэдра [15], как стерадианный телесный угол, опирающийся на одну квадратную грань.

Кубооктаэдр – полуправильный многогранник (архимедово тело) с 14 гранями в виде 8 правильных треугольников и 6 квадратов и 24 ребрами равной длины.



Кубооктаэдр можно получить:

- срезав с куба 8 правильных треугольных пирамид;
- срезав с октаэдра 6 квадратных пирамид;
- как пересечение куба и октаэдра с общим центром.

Известна иллюстрация Леонардо да Винчи к трактату Луки Пачоли «О божественной пропорции» (1509).

Кроме того, θ – телесный угол при вершине правильного октаэдра.

Угол D-квадрата тупой и поэтому определяется как дополнительный:

$$\alpha=\pi-\mathrm{arctg}\,5/2=1{,}9513\ldots\approx 111{,}80^{\circ},$$

где $\mathrm{tg}\,\tilde{\alpha}=5/2$ – угол между кривыми x^2-2 и $\sqrt{2-x}$ в точке их пересечения $x_0=\Phi$. Он равен углу между касательными к этим кривым и находится из формулы

$$\mathrm{tg}\,\tilde{\alpha}=\frac{y_1'(x_0)-y_2'(x_0)}{1+y_1'(x_0)y_2'(x_0)}.$$

Сумма углов D-квадрата составляет $4\alpha\approx 447{,}2^{\circ}$.

Вместо заключения.

Практически каждый человек – математик. Только одни создают, другие пользуются.

Причем пользование часто приобретает замысловатые формы с вкладыванием особого символизма, спряженного с таинствами, мистицизмом и т.п.

Почему бы и нет, если сама математика сплошь "символизирована" и построена на применении специальных символов.

Например, в простом уникальном равенстве 2 + 2 = 2×2 = 2^2, состоящем из шести двоек, при желании можно усмотреть дьявольское начало.

Ничего подобного в арифметике больше нет.

Или взять дату зеркальную "магическую" дату-палиндром 22.02.2022, также состоящую из шести двоек. Подобное сочетание чрезвычайно редко и потому считается наполненным особой энергетикой. Дата-палиндром – конечно, метафора, но многие позиционируют такое событие в символическом смысле-контексте. К слову, начало полномасштабных военных действий в Украине корреспондируется именно с этой датой. Не случайно экс-лидер ЛДПР еще в конце 2021 года публично заявил: «Вы почувствуете 22 февраля, в четыре утра, 2022 года». Почувствовали... Только на два дня позже, поскольку 23 февраля – ежегодный государственный праздник и нерабочий день в России и Кыргызстане.

Так или иначе, «день шести двоек» как-то обговаривался и нашел-таки свое палиндромическое отражение и воплощение. «Здесь мудрость. Кто имеет ум, тот сочти число зверя, ибо это число человеческое; число его – шестьсот шестьдесят шесть» (Откр. 13:18) – хорошо известная негативная коннотация числа зверя 666.

Путем простого пересчета букв в числа (изопсефия, гематрия), по одной из версий первых христиан здесь представлено конкретное человеческое лицо – имя римского императора Нерона – рьяного гонителя христиан.

Либо общее: «царь Израилев». Допустимы и другие прочтения. Собственно и всё.

Имя антихриста может быть переведено в числовую форму 666, однако обратная логика здесь не работает и вовсе не означает, что это число дьявольское.

Сами церковники придумали "число зверя", сказали что 666 – это дьявольщина, инфернальная ипостась, и стали запугивать им людей. Многократность повторения подчеркивает усиление и в христианстве означает ярко выраженное несовершенство.

Что здесь дьявольского, приходится гадать, но название прижилось, в том числе из-за числовой гармонии. Синонимы: необычайный, необыкновенный, поразительный по силе, степени проявления, изумительный и т.п.

Если в христианстве число 7 символизирует полноту (7 цветов радуги, 7 дней недели и т.д.), то число 6 – неполноту, несовершенство.

Напротив, в Китае шестерка издавна считается счастливым числом: всё идет как надо.

А на три шестерки вообще смотрят исключительно позитивно, с восторгом.

Кому доверять больше, как ни древнейшей цивилизации и родине выдающихся изобретений человечества.

Шестеркам присуща положительная энергетика и гармония.

Три шестерки (666) – энергетически сильная когнитивная структура, обусловленная неповторимыми уникальными свойствами самого числа и его составляющих. И если некоторые люди его боятся, то в силу суеверий, излишних воображений и коллективной иллюзии. – Архаичный, идеологически забитый и запуганный народ.

Ничего дьявольского нет. Хотя термин уже прижился и применяется, чтобы нагнать ужасу, такая себе «страшная сказка на ночь», либо загадать внимательному зрителю загадку.

Да и просто ради шутки.

В мире математики число 666 имеет интересные особенности и особое значение, что позволяет его считать **символом совершенства и актуальной бесконечности** [16–18].

Изящный, увлекательный и красивый числовой объект. «Потому, что все оттенки смысла умное число передает...» (Н.Гумилев).

Например, 666 – наименьшее треугольное число вида n^2+m^2, где n, m, $n+m$ – треугольные числа [19, с. 225]. – Прямая числовая связь с христианской троицей.

Зачем же его судить и переводить из состояния "подозреваемого" в статус "виновного"? – Вопрос риторический.

Нуллифицирующий вердикт присяжных: казнить нельзя помиловать...

Литература:

1. Огольцева Е.В. Словосочетания с образно-компаративной семантикой (к вопросу о фразеологической связанности лексического значения) // Учен. записки Крымского ун-та имени В.И.Вернадского. Филологические науки. – 2022, **8** (2), 130-148.

2. Василенко С.Л. Дьявольский квадрат в золотом отражении // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24162, 08.01.2018. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163574.htm.

3. Weisstein E.W. Devil's Staircase. From MathWorl. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/DevilsStaircase.html.

4. Weisstein E.W. Devil's Curve. From MathWorl. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/DevilsCurve.html.

5. Харди Г. Расходящиеся ряды. Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. л-ры, 1951. – 504 с. – http://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Hardi1951ru.pdf.

6. Василенко С.Л. Метаморфозы представлений: от деления в крайнем и среднем отношении – до золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22463, 01.09.2016. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163040.htm.

7. Steve C. Wang. The sign of the devil... and the sine of the devil // J. Recreational Math., 1994, **26** (3) 201-205. – https://paleo.domains.swarthmore.edu/Publications/jrecmath1994.pdf.

8. Ковалев А.Н. Золотое сечение и парабола, как геометрический объект // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24631, 11.07.2018. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163743.htm.

9. Василенко С.Л. Параболическое решение золотой пропорции: математика и жизнь // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24680, 03.08.2018. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163753.htm.

10. Ткаченко И., Ткаченко М. Гиперболический генезис золотой пропорции и золотого сечения // Міжнарод. електр. наук. ж. «Наука онлайн», 2019. – № 3. – https://nauka-online.com/.

11. Василенко С.Л. Золотая пропорция в гиперболической интерпретации Ткаченко // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26912, 14.01.2021. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164602.htm.

12. Арнольд В.И. Цепные дроби. М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 40 с.

13. Likuan Zhao. The kissing number of the regular polygon // Discrete Mathematics, 1998, 188 (1-3), 293-296. – https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X98000272.

14. Василенко С.Л. Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Части 1–10. // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22128, 27.05.2016. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm.

15. Weisstein Eric W. Cuboctahedron. From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Cuboctahedron.html.

16. Василенко С.Л. 666 – символ совершенства и актуальной бесконечности // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15872, 08.04.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161632.htm.

17. Василенко С.Л. 666 – символ совершенства и актуальной бесконечности. Часть 2 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 25157, 07.02.2019. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001g/00163933.htm.

18. Василенко С.Л. Числовые метаморфозы: 144 тысячи, 666, календарь Майя и 12.12.12 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17788, 12.12.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0012/001d/2480-vs.pdf.

19. Деза Е., Деза М. Фигурные числа. Пер. с англ. – М.: МЦНМО, 2015. – 350 с.