С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 15. Решить нельзя бросить...

Вместо вступления.

Простота <мудрости> – кратчайший путь к решению проблемы и непременное условие для обеспечения надежного результата, хотя дается обычно нелегко.

Простое эффективное решение часто представляется таковым только с виду.

В действительности оно концентрирует в своей структуре сгусток нетривиальных составляющих (синтез шагов-этапов) и образно говоря, может быть сложнее сложного.

Сложность обыкновенно искусственна. Простые модели помогают понять мир.

«Язык правды прост» (Сенека).

Золотое сечение и числа Фибоначчи – модели минимальных возможностей

Даже умудренные специалисты обыкновенно считают, что золотое сечение (ЗС) порождается числами Фибоначчи.

В известной мере, да. Но по охвату общей ситуации это весьма слабое утверждение, которое сужает и затуманивает проблематику.

Прежде всего, следует различать два разных принципиальных момента [1]:

1. С точки зрения математики, ЗС и числа Фибоначчи – две большие разницы! Это абсолютно разные математические структуры.

2. ЗС определяется не числами Фибоначчи так таковыми, а закономерностью их формирования в виде двухчленно-аддитивной рекурсии!

Иначе говоря, золотое сечение "генетически" обусловлено процедурой получения членов числового ряда и не имеет прямого отношения к самим числам Фибоначчи.

Известная «кроличья сага» (по Фибоначчи) – это изначально искусственная, выхолощенная и до предела идеализированная задача.

Однако она имеет важные неизменные плюсы:

- порождение самой простой аддитивной рекурсии, – менее двух слагаемых при суммировании просто не бывает;
- использование специфически примитивных и одновременно универсальных начальных условий (0, 1), порождающих через их сумму число 1, – то есть начало синтезируется единицей, как в натуральном ряде.

Исходная пара (0, 0) недееспособна, – в смысле образования числового ряда.

Пара (1, 0) уже после первого суммирования приводит к (0, 1). Поэтому пара начальных условий (0, 1) – элементарнейшая в области неотрицательных целых чисел.

Благодаря комплексу таких, очевидно простых, отправных положений и образуется отличная математическая модель.

Другой аспект...

Числа Фибоначчи принято рассматривать в контексте их исторического появления через "кроличий" ряд, который генерируется по наиболее простой рекуррентной схеме суммирования двух переменных – предшествующих чисел:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

с натуральным индексом (дискретным временем) n и начальными условиями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

Они нашли широкое применение в современной теории чисел и не только.

В чём же истинное содержание данного математического объекта? – Прежде всего, это аддитивная динамическая модель линейного дискретного типа.

Порождающее равенство – линейное однородное разностное (возвратное) уравнение второго порядка с постоянными единичными коэффициентами.

Структурно математическая форма отличается минимально возможной простотой в классе аддитивных конструкций, имея принципиальные отличительные особенности в правой формообразующей части:

– два слагаемых как наименьшая совокупность, – меньше просто не бывает;
– два рядом стоящих дискретных момента времени n с минимальными запаздываниями;
– два целочисленных единичных коэффициента.

Другими словами, налицо три пары «минимальных возможностей». Именно они определяют базис в виде золотого сечения, вокруг которого формируются различными способами другие обобщенные числа и последовательности Фибоначчи [2].

Математический аспект.

Общая направленность и основной угол зрения настоящей статьи в первую очередь связаны с делением пополам. Это магистральная линия.

Вполне естественно и оправдано посмотреть с этих позиций на модифицированную модель Фибоначчи с усреднением соседних членов.

Рекуррентная последовательность арифметического среднего $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$, n = 0, 1, 2, 3, … с начальными условиями a_0, a_1 рассмотрена, например, в работе [3].

И как часто бывает, несколько витиевато, с перенасыщенными выкладками.

Не стоит усложнять без необходимости, если применим универсальный подход.

Перед нами линейное однородное разностное (возвратное) уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, которое запишем в более общей форме

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{s}. \tag{1}$$

Его характеристическое уравнение $s \cdot x^2 = x+1$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4s}}{2s}$.

В явном аналитическом виде $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, где константы находятся из начальных условий a_0, a_1 при $n = 0$ и $n = 1$:

$$C_1 = \frac{a_1 - a_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{-a_1 + a_0\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

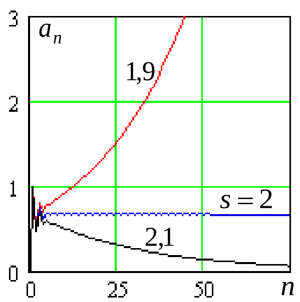

Рис. 1. Примеры последовательностей a_n

Характер числового ряда a_n зависит от значения s (рис. 1):

$s < 2$ – ряд уходит в бесконечность;
$s > 2$ – стремится к нулю;
$s = 2$ – имеет конечный предел:

$$a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3} + \frac{2}{3}(a_0 - a_1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_0+2a_1}{3}.$$

Если $s = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, то $a_n \to 2/3$ – модель «две трети», как простая модель рациональной пропорции [4], в общей системе динамических моделей троичности [5].

Предел можно также определить через новую последовательность ($s = 2$):

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n = \frac{1}{2} d_{n-1}.$$

Бесконечная сумма этих разностей – геометрической прогрессии будет пределом a_n за вычетом начального значения: $\Sigma\, d_n = \dfrac{d_0}{1-(-1/2)} = \dfrac{2}{3} d_0 \; = \; \lim\, a_n - a_0$.

Отсюда $\lim\, a_n = a_0 + \dfrac{2}{3}(a_1 - a_0) = \dfrac{a_0 + 2a_1}{3}$.

Согласно теореме Даниила Бернулли (1732) [6] соседние члены возвратной последовательности изменяются так, что с удалением от начальной точки их отношение стремится к максимальному по модулю корню характеристического алгебраического уравнения. То есть для всех $s > 0$ и не равных одновременно нулю начальных условий $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$, предел отношения соседних элементов ряда a_n (аттрактор) – равен наибольшему по модулю корню $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4s}}{2s}$:

$$s \begin{cases} < 2 \\ = 2 \\ > 2 \end{cases} \Rightarrow \; A \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}.$$

Значение $s = 1$ дает числа Фибоначчи с аттрактором $A = \Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2 \approx 1{,}618$ – константой золотого сечения.

Как видим, деление пополам формирует четкий водораздел, распределяющий числовые ряды в совершенно разные по свойствам множества-океаны.

Заметим также, что сама модель (1) относится к большому классу обобщенных последовательностей Фибоначчи, в данном случае – нецелочисленных.

Но, никакого отношения к обобщению золотого сечения – такого себе досужего увлечения некоторых авторов, конечно, не имеет.

В поисках пятого порядка.

Так называется монография Андрея Ковалева [7], в которой рассматриваются закономерности чисел Фидия (константы ЗС), Фибоначчи и диэдрической группы симметрии пятого порядка (5 поворотов вокруг центра или оси вращения и 5 осевых отражений) с их проявлениями в разных областях научных знаний и практических приложениях.

Продолжая развитие данного направления, уместно упомянуть также работу [8], где на основе свойств собственных (характеристических) значений квадратных матриц показано, что пятая степень матрицы 2×2 равна единичной матрице

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для пяти пар вещественных чисел:

$$(a \quad b) = (1 \quad 0);$$

$$(a \quad b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} & \pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{pmatrix} = \left(-\phi^2 \quad \pm\sqrt{1+\phi^2}\right);$$

$$(a \quad b) = \begin{pmatrix} \dfrac{-\sqrt{5}-3}{2} & \pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} \end{pmatrix} = \left(-\Phi^2 \quad \pm\sqrt{1+\Phi^2}\right),$$

где $\Phi = \phi^{-1} = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ – константа золотого сечения.

Напомним, что число λ и ненулевой вектор $\bar{v}$, удовлетворяющие уравнению $\mathrm{A}\bar{\mathrm{v}} = \lambda\bar{\mathrm{v}}$, называются собственным значением и собственным вектором матрицы A соответственно.

Число λ является собственным числом матрицы A в том и только в том случае, когда $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}$ не имеет обратной, что эквивалентно $|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}| = 0$, I – единичная матрица.

Исходная и транспонированная матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Определитель исходной матрицы $|\mathrm{A}| = \lambda_1\lambda_2 = a + b^2$.

След матрицы (сумма элементов главной диагонали) $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 = a + 1$.

Исходя из свойств матриц [9], можно показать, что выполняется и более общее 5*n*-кратное умножение (симметрия относительно поворота вокруг оси):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 1 \end{pmatrix}^{\pm 5\cdot n} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & 1 \end{pmatrix}^{\pm 5\cdot n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с теми же значениями $a, b;$ n = 1, 2, 3, ...

Так такового деления на два здесь нет, но двойка присутствует в виде порядка исходной матрицы, знаменателя в константе ЗС и степени "золотых" чисел ϕ, Φ.

Далее перейдем к наиболее спорному, неоднозначному и противоречивому моменту нашего изложения.

Решить нельзя отбросить...

Осветим суть вопроса или, как говорят на языке арго, откуда ноги растут. А поставить запятую в нужном месте подзаголовка, предлагаем вдумчивому читателю.

Первопричиной стала несложная задачка [10]: каким должно быть a_1, чтобы линейная рекуррентная последовательность $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$ при $a_0 = 1$ оставалась положительной? – Аналогичные формы рассмотрены нами ранее в работах [11, 12].

Характеристическое уравнение $x^2 = 1 - x$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \to -\Phi,\ \phi = \Phi^{-1}$.

Собственно и всё решение. – При любых начальных значениях, за исключением единственного $a_1 = \phi$, согласно теореме Бернулли последовательность сходится к максимальному по модулю, но отрицательному аттрактору –Ф. То есть она становится знакопеременным рядом, с увеличивающимися абсолютными значениями.

В работе [10] выполнен ряд малополезных преобразований, в ходе которых числители перепутались со знаменателями, и в итоге получено неверное решение. Проверка не проводилась. Приходится сожалеть, что свежие идеи сопряжены с ошибками.

Как в студенческой шутке: «Чем больше учимся, тем больше знаем. Чем больше знаем, тем больше забываем. Чем больше забываем, тем меньше знаем. Зачем тогда учиться...».

А если серьезно, то нагромождение вычислений неизбежно повышает вероятность допустить просчеты.

Но это всё поправимые пустяки-детали. Главный посыл состоит в ином.

Итак, строгое решение формально получено: $a_0 = 1,\ a_1 = \phi$.

Оно есть. Мы его видим. Хотя в действительности его как бы и нет, поскольку нельзя реализовать на уходящей вдаль стреле времени.

Для реализации начальное значение $a_1 = \phi$ должно быть задано с идеальной точностью! Со всеми (!) знаками после запятой.

Но для иррациональных чисел это принципиально невозможно.

Поэтому сначала всё идет как бы хорошо, по заданному плану, в соответствии с полученным алгоритмом.

Но в определенный момент процесс расстраивается (рис. 2).

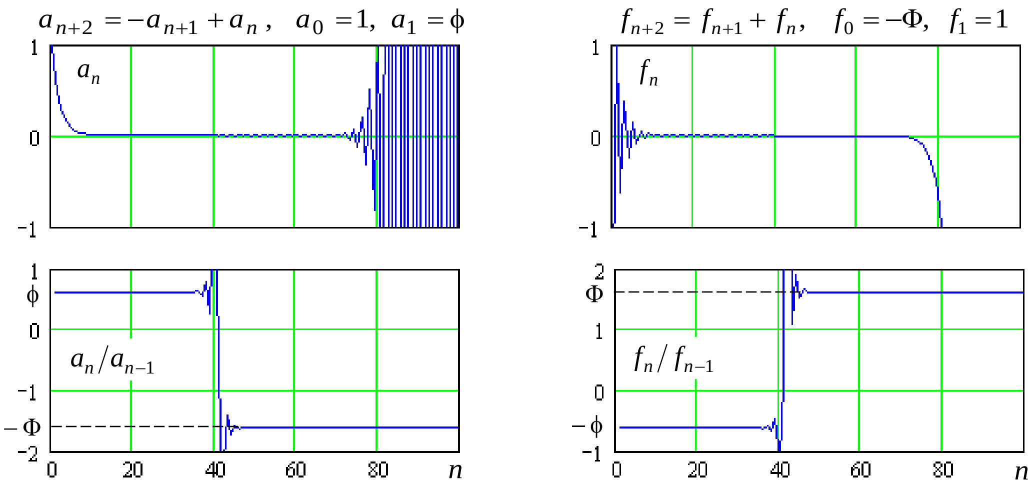

Рис. 2. Бифуркация процессов,
обусловленная точностью стандартных машинных вычислений $\delta = 10^{-15}$

Происходит самопроизвольная бифуркация с коренной перестройкой-переориентацией генерируемой последовательности на более устойчивый отрицательный корень [11, 12].

Неизбежно. Мы не можем задать иррациональное число ϕ с бесконечной точностью. Следовательно, процесс по формуле $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$ с начальными значениями $a_0 = 1,\ a_1 = \phi$ рано или поздно "сорвется" с бифуркацией (качественной перестройкой) на знакопеременные числа. Для сколь угодно малой величины $\delta = 10^{-k}$ система обязательно перестроится в точке $n \approx 1 + 2{,}4 \cdot k$ [11].

И никакая точность представления не в силах помочь. Фаза есть, а света нет...

Поэтому мы ставим свою запятую: решить нельзя, отбросить. – В контексте устойчивости полученного решения.

Бесконечность и неизбежная бифуркация

Что может спасти рассмотренную задачу от неизбежной бифуркации? – Только пресловутая бесконечность или точнее, представление иррационального числа золотого сечения с бесконечным хвостом значащих цифр. – Как ни парадоксально, бесконечность упирается в конечное, и им же "ограничивается".

Бесконечность – это не число. Образ, идея, категория, концепция...

Да и сама вера в бесконечность весьма зыбка и непрочна.

Ничего бесконечного в нашем мире нет.

Есть некая вынужденно придуманная идеализация, которая существует только в абстрактной математике и бренном полете фантазии.

Может, философы выручат? – Но у них самих диссонирующий разнобой, слабо проливающий свет.

Как солнечный зайчик: вроде поймали-схватили, а он снова мерцает на руке.

Всё имеет свой срок, исключительное место, определенную меру.

Даже всесильный бог. Как бы он не сросся со своим местом-положением, ему тоже отмерено. На смену придет новый бог или зеркальный гоб. Никакая математика бесконечности этому не в силах помешать.

Армрестлинг выиграет физика.

Вселенная до безобразия огромна, в десятки-сотни млрд световых лет.

Но вселенная конечна. Хотя бы потому, что "не вибрирует" на длинных волнах. Но так таковых привычно-осязаемых границ не имеет. Ввиду искривления пространства-времени.

Исходя из сути теорем Гёделя, в терминах математической теории мы не можем построить систему утверждений, одновременно непротиворечивую и полную. Один из выводов Гёделя, по сути, гласит, что в любой системе исходных аксиом всегда найдутся вопросы, на которые математика не сможет найти ответ. В другом контексте его теории, понятие математической истины только частично досягаемо в рамках любой формальной системы. – То есть математика не всесильна. Математическая истина относительна. А "всемогущество" теорем не выходит за рамки исходных формальных систем.

От такой информации мозг отказывается нормально рассуждать, с полным непониманием того, что делать дальше, и где выход из ситуации. Да и есть ли он вообще...

Адепты догматической веры в бесконечности наперебой начнут объяснять-доказывать различие между потенциальной и актуальной бесконечностью, апеллировать к теории множеств и т.д. – Кивнем головой по-болгарски.

Бесконечность изначально абсурдна, по определению, ибо констатирует не наличие, а отсутствие главного признака. Нет конца... А что тогда есть? Дырка от бублика?

Идея бесконечности вводится путем отрицания-отвержения. Исходя из семантики слова, отрицание больше свойственно словесному общению (через разговор, письма, книги), но мало приспособлено для формирования понятийных конструкций.

Какое же это определение (?): бесконечное, значит не конечное, без конца.

Вводимое понятие не должно строиться на отрицании чего-либо. Иначе возникает незавершенность. Лошадь – это животное, которое <u>не</u> является слоном. Лошадь – это животное <u>без</u> хобота. Из отрицания признаков предмета не следует, чем он тогда является.

В этом смысле Бог, как высшее существо, воспринимается более реалистично, поскольку дефиниция основана не на отрицании, а на существовании. Верить в это или не верить – другой вопрос.

Отрицание может усиливать утвердительное значение понятия, придавать ему дополнительный нюанс-оттенок, но не подменять его.

На наш взгляд, бесконечное существует в конечном и является одной из форм его проявления.

То есть бесконечное находится <как бы> внутри конечного, а не наоборот! Сродни небольшой окружности, у которой нет ни начала, ни конца. Не случайно церковь, циркуль, цирк, циркуляр и т.п. объединяет общий корень от латинского слова *circulus* круг.

При этом определение конечного идет через позитив: конечное – то, что имеет предел, границу, конец.

Бесконечность – отражение конечного в его движении, преломлении, искривлении и т.п., <расплывчатая> неопределенность.

Подобно конечному образу с размытыми, нечеткими границами.

Как воздушно-пушистое облако в нечетких множествах – fuzzy sets.

Таким образом, полученный бесконечный процесс формирования положительных чисел $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$ $(n \to \infty)$ с начальными значениями $a_0 = 1$, $a_1 = \phi$, не проходит "элементарную" проверку на достоверность.

Решение есть. Изящное и простое. Но решения одновременно нет...

Оно исправно функционирует на сколь угодно длинной конечности, в бесконечности – не работает, уходя в бессрочный кредитный отпуск. – Окей, подождем.

Роды неизбежны, ибо бесконечность – не более чем эффектный искусный трюк, возникший вследствие ограниченности и бессилия чистого разума (по Канту).

To be continued...

Литература:

1. Василенко С.Л. Бинарный характер золотого сечения и последовательностей Фибоначчи // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24230, 31.01.2018. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163604.htm.
2. Generalizations of Fibonacci numbers / From Wikipedia, the free encyclopedia. – https://en.wikipedia.org/wiki/Generalizations_of_Fibonacci_numbers.
3. Michael Penn. Just an average recursion...OR IS IT? / YouTube video, 2023. – https://www.youtube.com/watch?v=EBdEMIJK6aY.
4. Василенко С.Л. «Одна или две трети», как простая модель рациональной пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23089, 23.02.2017. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163219.htm.
5. Василенко С.Л. Динамические модели троичности. Часть 1 – часть 3 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.25382, 23.04.2019. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001g/00164020.htm / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.25457, 22.05.2019. – URL: http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001g/00164041.htm / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.25476, 02.06.2019. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001g/00164049.htm.
6. Утешев А.Ю. Разностное уравнение и рекуррентная последовательность. – http://pmpu.ru/vf4/recurr.
7. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. – Ridero, 2023. – 398 с.
8. Michael Penn. On the fifth root of the identify matrix. – YouTube video, 2022. – https://www.youtube.com/watch?v=ZdXfgmxPfHI.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц: пер. с англ., 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
10. Michael Penn. A positively golden sequence / YouTube video, 2023. – https://www.youtube.com/watch?v=8NILRfX5L8s.
11. Василенко С.Л. Бифуркации в нелинейной динамической модели на основе "золотого" сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15232 от 14.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322037.htm.
12. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17099, 13.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322080.htm.

Харьков, Украина