

ЗОЛОТОЙ АРБЕЛОС АРХИМЕДА И БЕСКОНЕЧНЫЕ ЦЕПОЧКИ ОКРУЖНОСТЕЙ

Введение

Геометрия – одна из наиболее древних математических наук.

Её первые проявления присутствуют в шумерских храмах IV тысячелетия и египетских мастабах начала III тысячелетия до н.э., за тысячелетие до всех сохранившихся математических клинописных таблиц и папирусов.

Основы научной геометрии заложены в далеком прошлом, начиная с системного изложения "Начал" Евклида.

Развитие не прекращается. Геометрия обогащается новыми знаниями и направлениями, выходящими далеко за пределы своей колыбели.

Но и древние классические задачи нисколько не стареют.

Они трансформируются, обобщаются и продолжают своё "взращение" в современных исследованиях.

С познавательной точки зрения и практической стороны проблематики интересным и важным аспектом является проявление золотого сечения. Каждое его присутствие привносит свой неповторимый колорит, согласованность и слаженность той или иной геометрической конструкции, с появлением новых только ему присущих свойств.

Одно из таких приложений проанализируем в известной задаче Архимеда.

Общие сведения

Согласно теореме Декарта [1], кривизны четырех окружностей, взаимно касающихся в шести различных точках, удовлетворяют квадратному уравнению:

$$\left(\sum k_j\right)^2 = 2\sum k_j^2, \quad (1)$$

где $k_j = \pm 1/r_j$ – кривизна j -той окружности; величина k_j считается отрицательной, если другие окружности касаются ее внутренней стороны.

Разрешив уравнение (1) относительно k_4 , получаем:

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}. \quad (2)$$

В общем случае имеется два решения, поэтому стоит знак \pm .

Если, например, третья окружность вырождается в прямую линию, то $k_3 = 0$ и уравнение упрощается:

$$k_4 = k_1 + k_2 + 2\sqrt{k_1k_2} \leftrightarrow \sqrt{k_4} = \sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}.$$

Если k_1, k_2, k_4 образуют геометрическую прогрессию, то $\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_2}{k_4} = \phi^2$, где

$\phi = \Phi^{-1} = (\sqrt{5} - 1)/2$ – золотая константа (малая).

Для полного определения окружности также необходимо знать её центр.

Соответствующее уравнение удобно представить через координаты центров $c_j = x_j + i \cdot y_j$ на комплексной плоскости, умноженных на кривизну $z_i = k_j c_j$:

$$z_4 = z_1 + z_2 + z_3 \pm 2\sqrt{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3},$$

где i – мнимая единица, $i^2 = -1$.

Арбелос и задача Архимеда

Арбелос – криволинейный треугольник, ограниченный тремя касающимися друг с другом полуокружностями радиусов r, r_1 и r_2 с коллинеарными центрами, при $r = r_1 + r_2$. Напоминает очертания сапожного ножа, от названия которого на греческом и произошло это слово. Это одна из наиболее интереснейших геометрических фигур, изучаемых многими геометрами ещё с античных времен, из-за её красивых свойств.

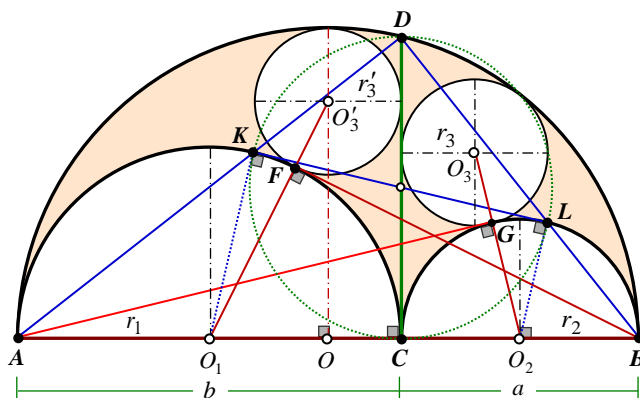


Рис. 1. Задача Архимеда и её свойства

Согласно известному решению с разными вариантами доказательства [2, 3] эти окружности (круги-близнецы Архимеда) равны $r_3 = r'_3$, а их кривизна $k_3 = k_1 + k_2$.

Обозначим точки пересечения окружностей O_1, O_2 с прямолинейными отрезками:

$$\bullet F(O_1, O_1 O'_3), \bullet G(O_2, O_2 O_3), \bullet K(O_1, AD), \bullet L(O_2, BD).$$

Наиболее характерные геометрические свойства:

- площадь арбелоса равна площади круга диаметром CD ;
- $AG \perp O_2 O_3, BF \perp O_1 O'_3$ – общая касательная к одной паре окружностей проходит через точку касания другой пары окружностей;
- $AG = AD, BF = BD$ – конгруэнтность отрезков общих касательных;
- $CKDL$ – прямоугольник, $CD = KL$;
- $KL = \tan(O_1, O_2)$ – общая касательная окружностей O_1, O_2 .
- диаметры d и координаты центров кругов-близнецов соответственно равны:

$$d_3 = d'_3 = \frac{ab}{a+b}, \quad \begin{cases} O_3 = b + r_3 + \sqrt{b(a-d_3)} \cdot i \\ O'_3 = b - r_3 + \sqrt{a(b-d_3)} \cdot i \end{cases}$$

Существуют также дополнительные варианты расположения окружностей r_3 [4], которые периодически пополняют каталог архимедовых кругов [5].

Рассмотрим одну задачу Архимеда.

В арбелосе проведем дополнительные построения (рис. 1).

На отрезке AB взята точка C .

На отрезках AB, AC, CB , как на диаметрах, в одной полуплоскости построены полуокружности O, O_1, O_2 соответственно. Из точки C восстановлен перпендикуляр $CD \perp AB$.

В два образовавшихся криволинейных треугольника вписаны окружности O_3, O'_3 .

В общем случае форма арбелоса зависит от отношения $\lambda = \frac{b}{a+b} = \frac{r_1}{r_2+r_1}$.

Параметры равны: $c = a+b$, $b = \lambda c$, $a = (1-\lambda)c$.

Если специально не оговорено, то без потери общности диаметр наибольшего полукруга равен единице: $a+b=1$, $b=\lambda$, $a=1-\lambda$.

Золотой арбелос и расширение задачи Архимеда

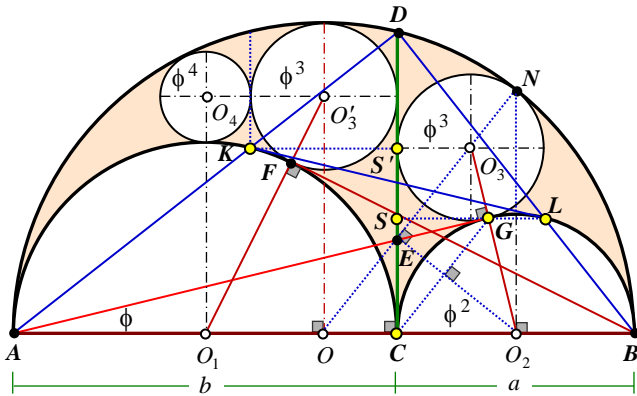


Рис. 2. Задача Архимеда для золотого арбелоса и её первое дополнение

Если рассмотреть вариант геометрической прогрессии радиусов исходных трех полуокружностей (r , r_1 и r_2), то получим

$$r_1 = \phi r, \quad r_2 = \phi^2 r.$$

Такая фигура получила название "золотой арбелос" [6, 7].

Если для него рассмотреть задачу Архимеда, то $r_3 = \phi^3 r$, и формируется более общая геометрическая прогрессия:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} = \phi.$$

Наличие золотой пропорции приводит к появлению дополнительных свойств-особенностей, в частности (рис. 2):

- прямые OO_3 и OO'_3 проходят через точки касания окружностей-близнецов с внешней окружностью;
- параллельность $OO'_3 \parallel CD \parallel O_2N$;
- равенство межцентровых расстояний $O_2O = O_2O_3$;
- $\triangle ABD$, $\triangle EOO_2$, $\triangle NOO_2$, $\triangle NO_1O_2$ – прямоугольные треугольники Кеплера, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{\phi}$.

Отметим, что в качестве исходного условия задачи можно было задать, например, требование параллельности $OO'_3 \parallel CD$, получив, как следствие, и золотой арбелос, и геометрическую прогрессию всех окружностей со знаменателем ϕ , и все остальные уникальные свойства.

Построение решения задачи Архимеда с золотым арбелосом дополним еще одной окружностью r_4 . Радиус окружности r_4 , касающейся окружностей $r = \phi^0$, $r_1 = \phi$, $r_3 = \phi^3 r$, согласно формуле (2) равен $r_4 = \phi^4$. То есть он встраивается новым членом в ряд геометрической прогрессии. При этом центры четырех окружностей лежат в вершинах прямоугольника $O_4O_1OO'_3$ с отношением сторон $2:1 = 2\phi^2 / \phi^2$.

Помимо основного золотого сечения $C = g(AB)$, точки K, L привносят дополнительный набор золотых сечений ($KS' \parallel AB \parallel LS$, $KS' = LS$):

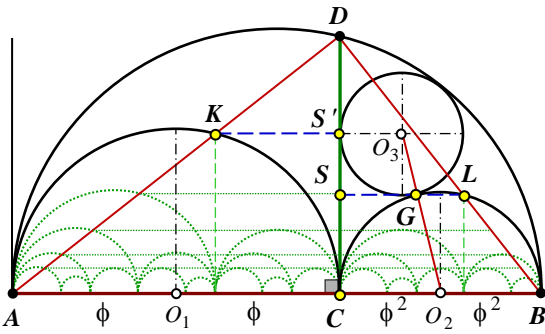


Рис. 3. Золотые сечения в золотом арбелосе

$$K = g(AD), \quad L = g(DB),$$

$$S = g(DC), \quad S' = g(CD), \quad G = g(O_2O_3).$$

$$\text{Так, } CD = \sqrt{AC \cdot BC} = 2\sqrt{\phi^3}.$$

$$\text{Уравнение окружности } O_1: (x - \phi)^2 + y^2 = \phi^2.$$

$$\text{Прямая } BD: \operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{\phi^3} / 2\phi = \sqrt{\phi}, \quad y = \sqrt{\phi} \cdot x.$$

$$\text{Точка } K: (x - \phi)^2 + (\sqrt{\phi} \cdot x)^2 = \phi^2 \rightarrow x = 2\phi^2;$$

$$CS' = 2\phi^2 \sqrt{\phi}, \quad CD/CS' = \Phi \text{ и так далее.}$$

Задача и теорема Паппа

Пожалуй, первым, кто исследовал бесконечную последовательность вписанных касающихся окружностей, был Паппа Александрийский, древнегреческий математик III века.

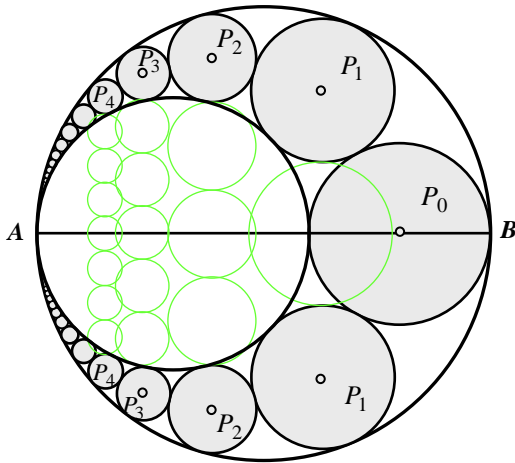


Рис. 4. Цепь Паппа Александрийского

Его именем названа цепь (рис. 4) – кольцо внутри двух касающихся окружностей, заполненное попарно касающимися окружностями меньших диаметров.

Для построения окружностей необходимо знать радиусы и координаты их центров.

Согласно изящной теореме Паппа *расстояние от центра каждой окружности до прямой AB равно произведению её диаметра на номер.*

Другими словами, между окружностями P_n по вертикали можно расположить нечетное количество $2n - 1$ таких же касающихся окружностей: между окружностями P_1 – одну, между окружностями P_2 –

три и так далее.

Задача быстро и эффектно решается с использованием инверсии [3, с. 26].

Начальная окружность P_0 начинается с O_2 .

Радиусы P_n и координаты центров C_{P_n} определяются по формулам, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} P_n = (1 - \lambda) \xi_n, \\ C_{P_n} = (1 + \lambda) \xi_n \pm n(2P_n)i, \end{cases} \quad \xi_n = \frac{c}{2} \cdot \frac{\lambda}{n^2(1 - \lambda)^2 + \lambda}.$$

В золотом арбелосе $\lambda = \phi$, $1 - \lambda = \phi^2$, $1 + \lambda = \Phi$ и тогда:

$$P_n = \frac{c}{2} \cdot \frac{\phi^2}{n^2\phi^3 + 1}, \quad C_{P_n} = \frac{c}{2} \cdot \frac{\Phi \pm 2n \cdot \phi^2 i}{n^2\phi^3 + 1}.$$

Обобщение задачи Архимеда

Рассмотрим цепочки окружностей p_n в задаче Архимеда, начальная из которых касается r , r_1 и r_3 (рис. 5). Радиусы цепочек касающихся окружностей, определим в рекуррентной форме с последовательным применением теоремы Декарта [1] для четырех взаимно касающихся окружностей:

$$p_0 = \frac{ab}{2c}, \quad C_{p_0} = b \left(1 - \frac{a}{2c} + \sqrt{\frac{a}{c} \cdot i} \right);$$

$$p_n = \left(\frac{2a}{bc} + \frac{1}{p_{n-1}} + \sqrt{\frac{8}{bc} \sqrt{\frac{a}{p_{n-1}} - 2}} \right)^{-1}, \quad C_{p_n} = \left(\frac{C_{p_{n-1}}}{p_{n-1}} + 2 \cdot i \right) p_n.$$

Примечательно, если $\lambda = \frac{m^2 - 1}{m^2}$, то $P_j = p_{j-m}$, $j = m, m+1, \dots$. Например, $\lambda = 3/4$.

В золотом арбелосе ($\lambda = \phi$) параметры определены в явном виде:

$$p_n = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{\Phi^3 + n^2\phi + 2n}, \quad C_{p_n} = p_n [\Phi^3 + 2(\Phi + n) \cdot i].$$

Для центрального круга единичного радиуса $c/2 = 1$ начальные радиусы равны:

$$p_0 = \phi^3, \quad p_1 = \phi^4, \quad p_2 = (\Phi^3 + 4\phi + 4)^{-1} \neq \phi^5,$$

то есть радиус круга, расположенного слева от круга $p_1 = \phi^4$ и касающейся его, уже не равен $\phi^5 = \Phi^{-5}$.

Цепочка целых степеней золотой константы прерывается (рис. 5, слева).

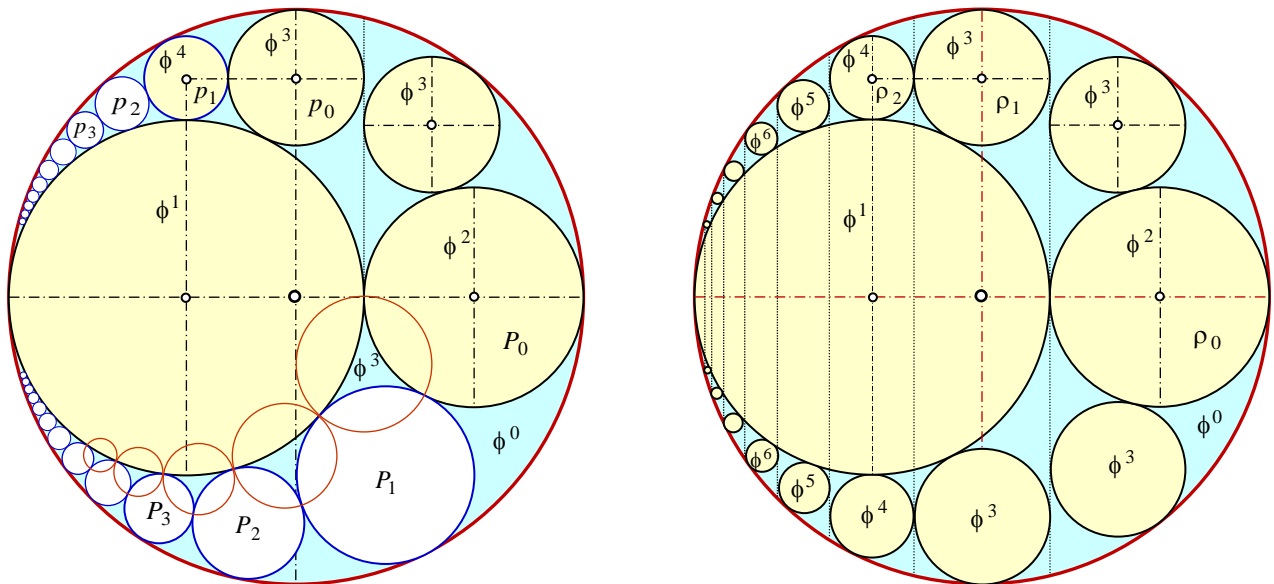


Рис. 5. Поиск обобщения задачи Архимеда по степеням ϕ^n

при формировании бесконечных последовательностей вписанных окружностей:

P_n – цепь Паппа Александрийского;

p_n – взаимно касающиеся круги, начиная с левого близнеца Архимеда;

ρ_n – золотые круги, касающиеся вертикальных прямых линий

Красным цветом на рис. 5 выделены окружности, которые проходят через точки касания окружностей Паппа между собой и окружностью O_1 . Первая из них – окружность Банкоффа [8], конгруэнтная архимедовым близнецам радиусом r_3 .

Вписанные окружности радиусами ϕ^n

Попробуем закончить цепочку вписанных окружностей радиусами ϕ^n .

Сначала установим отношение между параметрами двух окружностей, которые касаются полуокружностей с координатами центров $(u, 0)$, $(v, 0)$ и прямой $x = s$ (рис. 6):

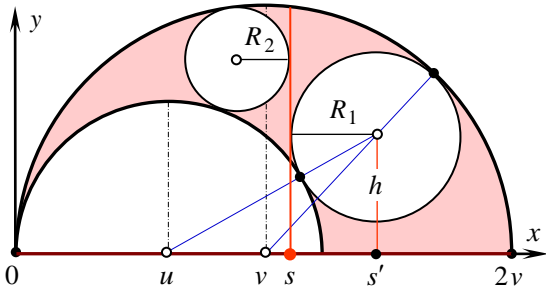


Рис. 6. К выводу отношения радиусов R_1, R_2

$$h^2 = (u + R_1)^2 - (s' - u)^2 = (v - R_1)^2 - (s' - v)^2;$$

$$R_1 = \frac{v-u}{v+u} \cdot s';$$

$$\begin{cases} R_1 = \frac{v-u}{v+u} \cdot (s + R_1) = \frac{v-u}{2u} \cdot s; \\ R_2 = \frac{v-u}{v+u} \cdot (s - R_2) = \frac{v-u}{2v} \cdot s; \end{cases} \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{u}{v}.$$

Как видим, отношение радиусов R_2/R_1 "вписанных" окружностей не зависит от положения прямой-касательной и определяется только отношением радиусов u/v "окаймляющих" окружностей. В предельном случае, когда вертикальная прямая касается окружности радиуса u , из этой формулы для отношения радиусов получается решение задачи Архимеда. С использованием данного положения находим радиусы и координаты центров в общем случае произвольного арбелоса:

$$\rho_n = a/2 \cdot \lambda^n, \quad C_{\rho_n} = (c - a/2)\lambda^n + c\sqrt{\lambda^{n+1}(1 - \lambda^n)} \cdot i.$$

К слову, периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей (u, v, R) не зависит от расположения R и равен диаметру $2v$ наибольшей окружности. Это означает, что центры окружностей R расположены на эллипсе с эксцентриситетом, равным $(u - v)/(u + v)$, и фокусами в точках $(u, 0)$, $(v, 0)$.

Радиусы окружностей выражаются целыми степенями константы золотого сечения ϕ^n , если они вписаны между дугами окружностей радиусами ϕ^0, ϕ^1 и вертикальными линиями, – по аналогии вписанных окружностей $r_3 = r'_3 = \phi^3$ в арбелос (рис. 5, справа):

$$\rho_{\phi_n} = \phi^{n+2}, \quad C_{\phi_n} = \phi^{n-1} \pm 2\sqrt{\phi^{n+1}(1 - \phi^n)} \cdot i.$$

Данная закономерность позволяет дополнить правый рисунок 5 до красивого варианта, оправдывающего общие свойства арбелоса (рис. 7), а также организовать фрактал встроенных арбелосов (рис. 8).

Иначе говоря, правую часть рис. 5 можно достроить, добавив справа круг в Φ раз меньшего диаметра, или построив внутри круга радиуса ϕ -новые арбелосы с близнецами.

В результате получим фрактальную структуру (рис. 8) со свойством самоподобия, где правые круги-близнецы Архимеда несколько выпадают из общего представления.

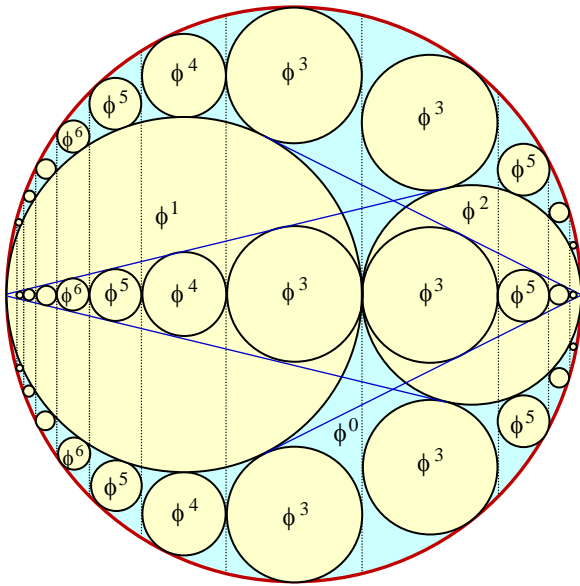


Рис. 7. Перенос последовательности вписанных окружностей на горизонтальную ось симметрии

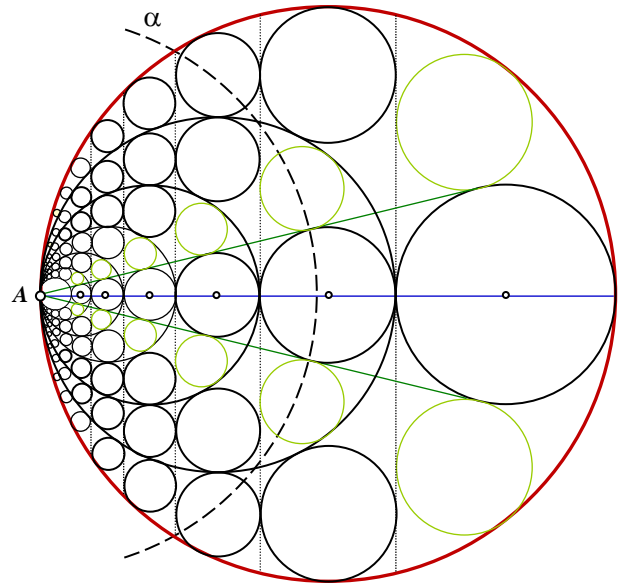


Рис. 8. Фрактальная структура встроенных золотых арбелосов: все окружности радиусами ϕ^n (правые близнецы отмечены зеленым цветом)

Продолжив это построение до бесконечности, получим заполненную полуплоскость, в которой будут только окружности радиуса Φ^n , где $n \in \mathbb{Z}$, и вертикальные прямые $x = \Phi^n$.

Данные окружности можно разделить на те, которые не проходят через точку B (группа "А"), и которые проходят через нее (группа "В").

Построим окружность α с центром в точке A и радиусом AD , где точка D с рисунка 2. Эта окружность ортогональна пересекаемым окружностям, не проходящим через точку A , и пересекает окружности, проходящие через точку A , в месте их пересечения с вертикальными прямыми (см. рис. 8). При *инверсии* нашего бесконечного построения относительно окружности α оно переходит само в себя. Начало доказательства верности этого утверждения можно найти в брошюре И.Жижилина [3], посвященной инверсии, где рассматривается и решение задачи Архимеда.

Напомним, две пересекающиеся окружности ортогональны, если касательные к ним в точке пересечения взаимно перпендикулярны. Их радиусы и расстояние между центрами (d) связаны теоремой Пифагора $r_1^2 + r_2^2 = d^2$. При инверсии относительно окружности радиуса R с центром в точке O , точка B переходит в точку A с выполнением равенства $|OA| \cdot |OB| = R^2$.

В нашем случае, если окружности группы А пересекаются с окружностью α , то переходят сами в себя, если же не пересекаются, то переходят в другие из своей группы, центры которых расположены на том же радиус-векторе.

Вертикальные прямые переходят в окружности группы В, и наоборот. Если эти прямые пересекались с окружностью α , то переходят в окружности, с которыми они пересекались на окружности инверсии. Отметим, что такой переход бесконечного построения в самого себя будет, видимо, при любом значении $\lambda = b/c$.

Компьютерное моделирование наглядно иллюстрирует и подтверждает достоверность и правильность выполненных геометрических построений (рис. 9).

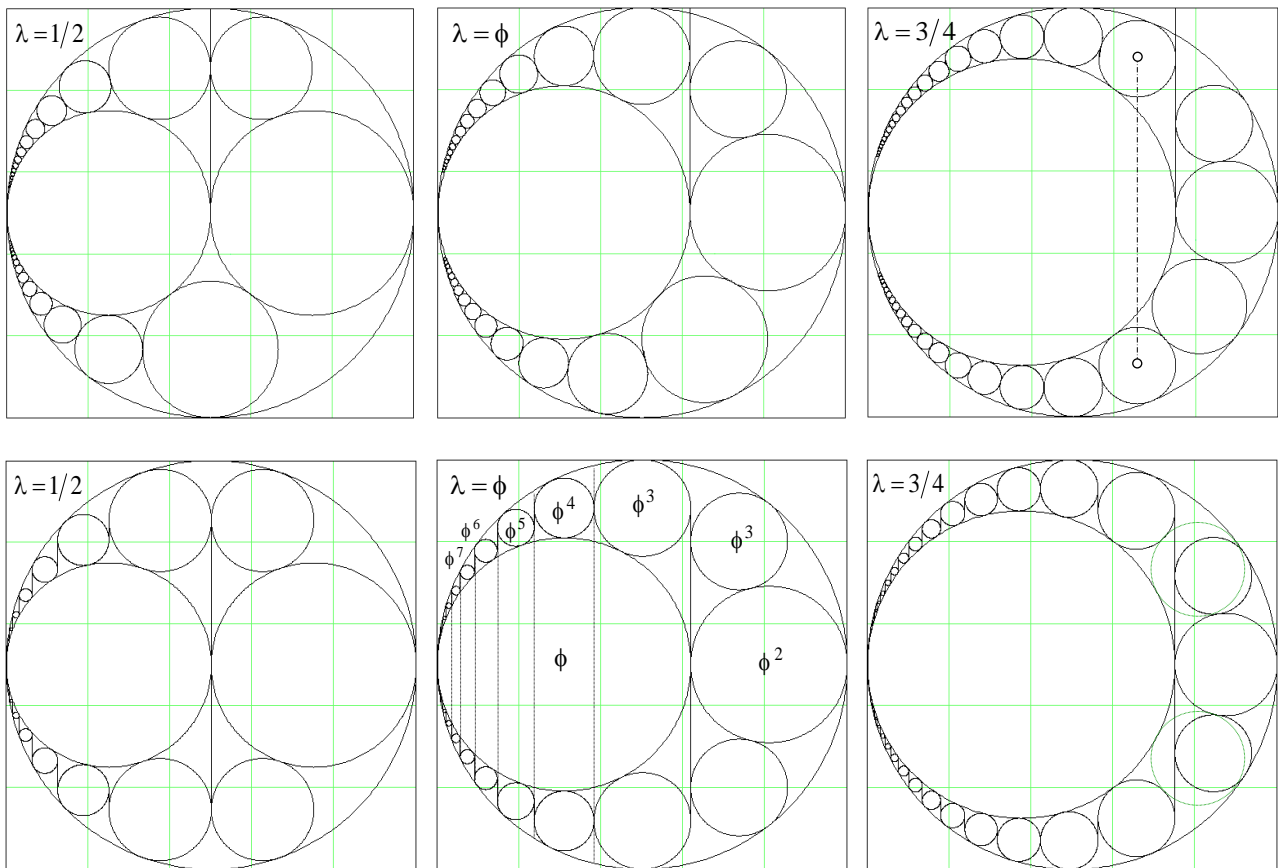


Рис. 9. Примеры компьютерного моделирования ($\lambda = b/c$)

Характерная закономерность цепочки окружностей в золотом арбелосе

Золотой арбелос отличается одной яркой особенностью, которая проявляется при совместном рассмотрении задачи Архимеда и вписывания в угол бесконечной последовательности взаимно касающихся окружностей [9].

Наверняка, известны уравнения разных касательных в арбелосе.

Нежели тратить время на их поиск, легче определить самим: через тангенс угла наклона касательной с привлечением пропорции в подобных треугольниках (рис. 10):

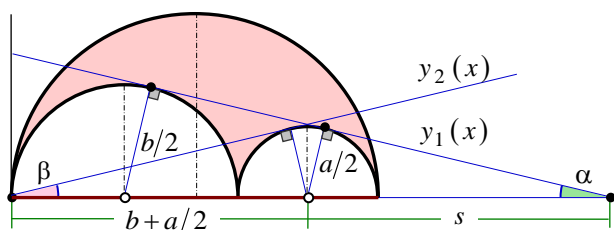


Рис. 10. Характерные касательные в арбелосе

$$\frac{s}{a/2} = \frac{s + a/2 + b/2}{b/2} \rightarrow s = \frac{a}{2} \cdot \frac{b+a}{b-a};$$

$$\sin \alpha = \frac{a/2}{s} = \frac{b-a}{b+a} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}};$$

$$y_1(x) = \frac{(a-b) \cdot x + b^2}{2\sqrt{ab}}.$$

$$\sin \beta = \frac{a}{2b+a} \rightarrow \text{tg } \beta = \frac{a}{2\sqrt{b^2 + ab}}, \quad y_2(x) = \text{tg } \beta \cdot x = \frac{a \cdot x}{2\sqrt{b^2 + ab}}.$$

Определим параметры, при которых равны отрезки $s = b + a/2$ и/или углы $\alpha = \beta$:

$$s = b + \frac{a}{2} \rightarrow b^2 - a^2 = ab, \quad v = b/a \rightarrow v^2 - v - 1 = 0 \rightarrow \underline{b/a = \Phi}.$$

$$\alpha = \beta, \quad \frac{b-a}{2\sqrt{ab}} = \frac{a}{2\sqrt{b^2+ab}} \rightarrow (b^2 - a^2)(b-a) = a^3 \rightarrow b^2 - ab - a^2 = 0 \rightarrow \underline{b/a = \Phi}.$$

В золотом арбелосе $b = c\phi$, $a = c\phi^2$ уравнения касательных принимают вид:

$$y_1(x) = \frac{c\sqrt{\phi}}{2} - \frac{\sqrt{\phi^3}}{2}x, \quad y_2(x) = \frac{\sqrt{\phi^3}}{2}x.$$

Как видим (рис. 11), в золотом арбелосе наличествует абсолютная симметрия кругов с центрами на оси абсцисс, расположенных слева и справа от центра меньшего круга арбелоса.

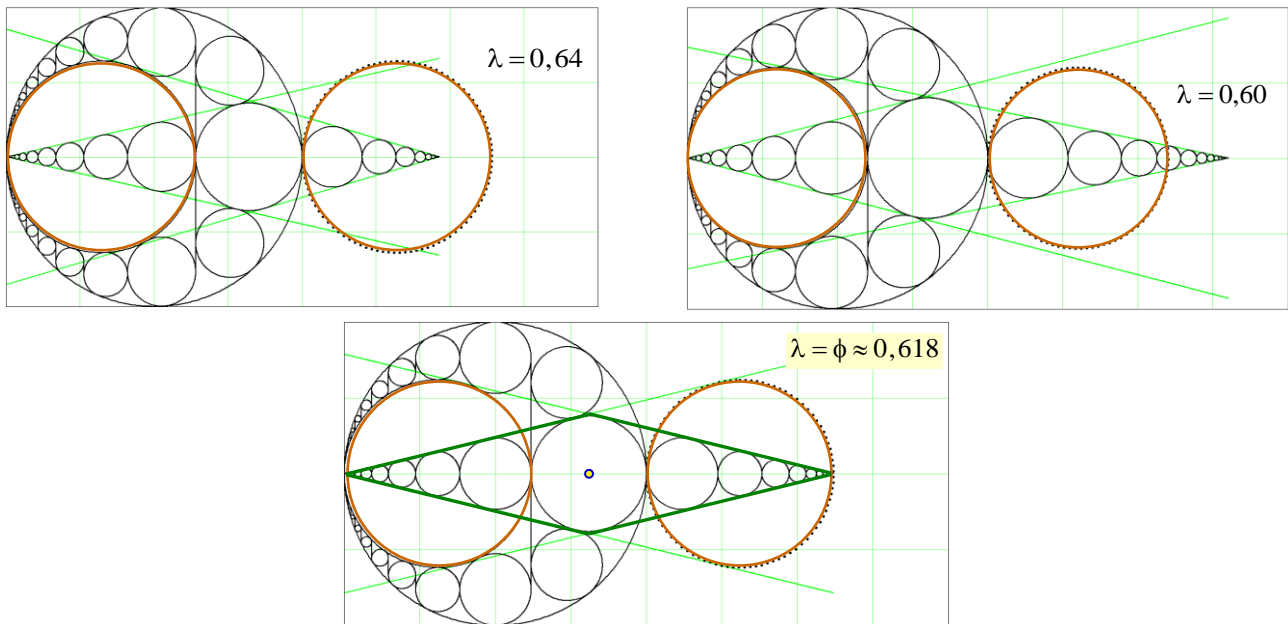


Рис. 11. Симметрия кругов с центрами на оси абсцисс в золотом арбелосе

Касательные при пересечении образуют ромб. Его диагонали при $c = 1$ равны Φ , $\sqrt{\phi}/2$.

Последняя геометрическая композиция весьма эффектно выглядит в её вертикальном исполнении (рис. 12).

На наш взгляд, ей можно дать отдельное самостоятельное название.

Что-то напоминающие развитие мироздания: с его зарождения, современное устройство и устремление в будущее.

Хорошо бы услышать мнение читателей с богатым воображением.

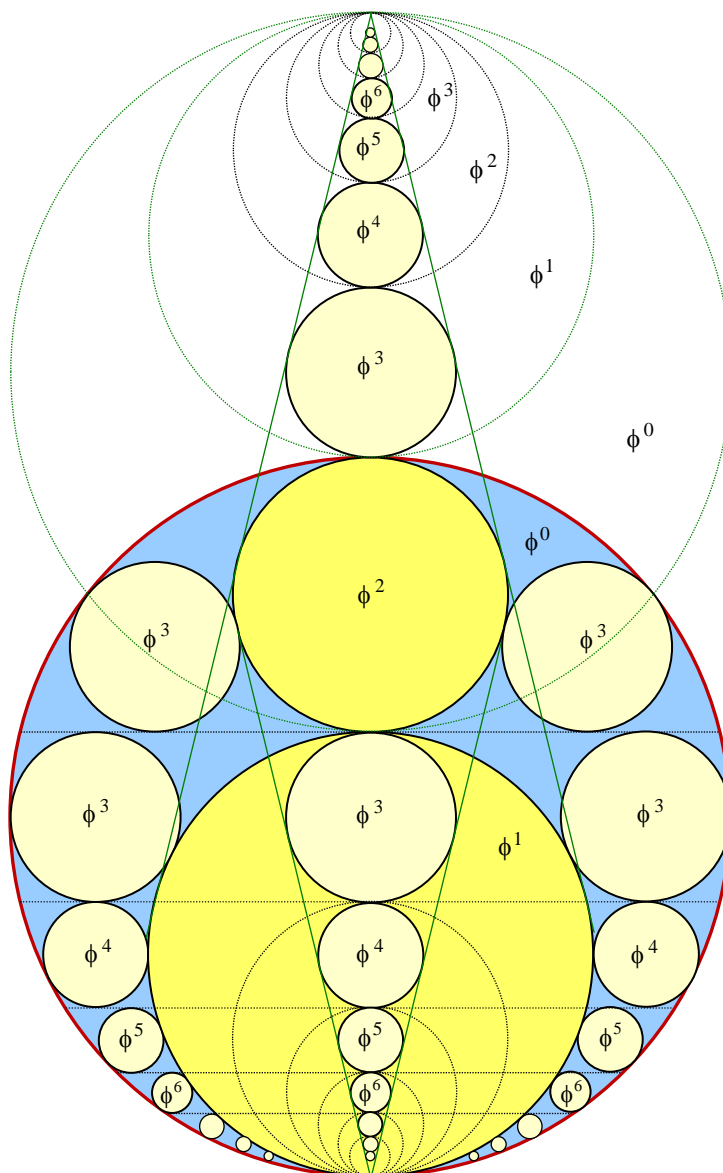


Рис. 12. Золотой арбелос с угловой надстройкой:
"космологическая" модель

Арбелосы, построенные на треугольнике

Примечательное свойство золотого арбелоса связано с геометрической конфигурацией [10], в которой на сторонах треугольника построены арбелосы с одинаковым отношением $\lambda = r_2 / r_1$. Доказано, что центры архимедовых окружностей-близнецов этих арбелосов формируют два треугольника (рис. 13), которые ортологичны и/или гомологичны исходному треугольнику только тогда, когда величина $\lambda = \phi$ равна константе золотого сечения.

Напомним [11, с. 37-45]:

- два треугольника *ортологичны*, если перпендикуляры из вершин одного из них к соответствующим сторонам другого пересекаются в одной точке – центре ортологии; с ними связаны теоремы Штейнера, Карно и др.;
- два треугольника *гомологичны*, если прямые линии, соединяющие их вершины, пересекаются в одной точке или параллельны (теорема Дезарга).

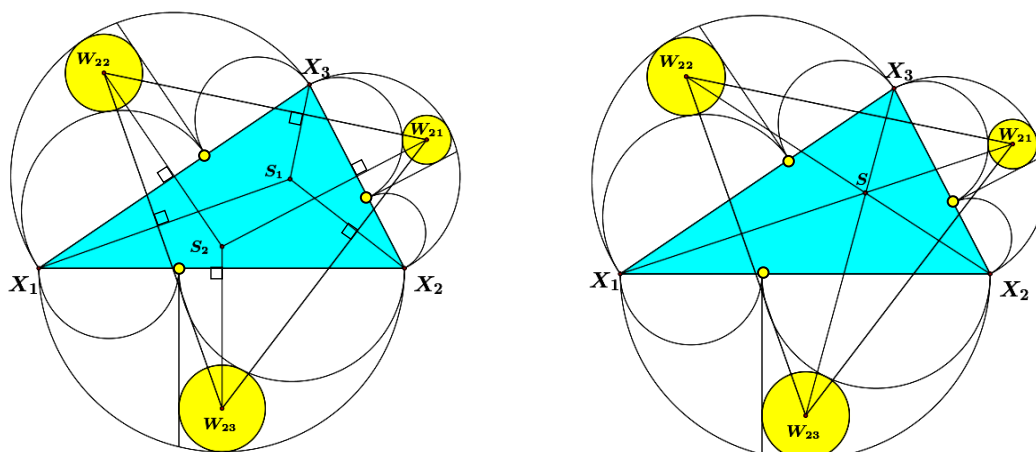


Рис. 13. Задача Архимеда и треугольники: ортологичные и гомологичные

Заключение

Что-то расходится, что-то не связывается или не выстраивается.
Золотое сечение всё это часто упорядочивает и гармонизирует.

Литература:

1. Lagarias J.C., Mallows C.L., Wilks A.R. Beyond the Descartes Circle Theorem // arXiv:math/0101066v1 [math.MG] 9 Jan 2001. – <https://arxiv.org/pdf/math/0101066.pdf>.
2. Бычков Б. Арбелос Архимеда // Элементы. Задачи. Математика, 11.07.2011. – https://elementy.ru/problems/127/Arbelos_Arkhimeda.
3. Жижилкин И.Д. Инверсия. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 72 с.
4. Dodge Clayton W., Schoch Thomas, Woo Peter Y., Yiu Paul. Those Ubiquitous Archimedean Circles // Mathematics Magazine, 1999, **72** (3), 202-213. – <https://retas.de/thomas/arbелos/Ubiquitous.pdf>.
5. F. M. van Lamoen. Online catalogue of Archimedean circles. – <http://home.wxs.nl/~lamoen/wiskunde/Arbelos/Catalogue.htm>.
6. Bankoff L. The golden arbelos // Scripta Math. 1955, **21**, 70-76.
7. Hiroshi Okumura. A characterization of the golden arbelos involving an Archimedean circle // Sangaku Journal of Mathematics. 2019, **3**, 67-71. – https://www.sangaku-journal.eu/2019/SJM_2019_67-71_Okumura.pdf.
8. Bankoff L. Are the Twin Circles of Archimedes Really Twins? Math. Mag., 1974, 47, 214-218.
9. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 11. Бесконечные круги // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28357, 26.02.2023. – <https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165248.htm>.
10. Cerin Z. Centres of the golden ratio Archimedean twin circles // <https://web.math.pmf.unizg.hr/~cerin/c136.pdf>.
11. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: в 3-х томах. Том 3. Треугольники и тетраэдры. – М.: МЦНМО, 2014. – 192 с.

© Василенко (Украина, г. Харьков),
Ковалев (РФ, г. Санкт-Петербург)

2023 