С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 11. Бесконечные круги

Бесконечность не предел

Вход свободный, обратного выхода нет.

Можем создать предельную последовательность, сходящуюся к нулевому аттрактору.

Воссоздать назад, начиная с нуля, по тому же алгоритму, только обратному, уже не можем. Обязательно требуется ввести к отправной точке конечное приращение > 0.

В противном случае, из нуля нам никогда не выбраться.

Заходим легко, выйти не можем. Нужны некие дискретные величины, условно понимаемые за бесконечно малые параметры.

Например, мы определяли предел отношения синуса x к его аргументу $x \to 0$ и показали, что он равен 1. А как теперь обратным ходом показать, что единица получилась именно в результате проведенной операции? – То есть прокрутить "кино" в обратном порядке, от *happy end* к титрам с его названием.

Или возьмем золотой прямоугольник со сторонами $1 \times \Phi^{-1}$ с нижней левой вершиной в начале координат (0; 0) и станем последовательно отрезать от него квадраты (слева – снизу – справа – сверху – ...). В конечном итоге прямоугольник выродится в безразмерную точку-аттрактор с координатами $(\Phi; 1) / \sqrt{5}$, на пересечении двух прямых $\Phi^{-1}x$ и $-\Phi(x - 1)$.

Чтобы раскрутиться в обратном порядке (с образованием золотой спирали с константой золотого сечения Ф), нам априори придется выбрать некоторый исходный прямоугольник с бесконечно малыми, но конечными размерами. Иначе из полюса не выбраться.

То есть, предельная точка находится, минуя бесконечно-повторяемую утомительную операцию усечения-отрезания, простым пересечением двух прямых. Но чтобы из неё выйти максимально точно и красиво, обязательно потребуется начальная фигура с малюсенькими размерами. Например, "привязать" к ней прямоугольник размером $(1 \times \Phi^{-1}) \cdot 10^{-20}$.

Ноль и бесконечность только с виду такие себе математические простаки-дурашки.

В действительности, даже на абстрактном уровне, они обладают невообразимо мощной энергетикой и притягательной силой.

Как черная дыра. – Войти легко, назад неимоверно трудно...

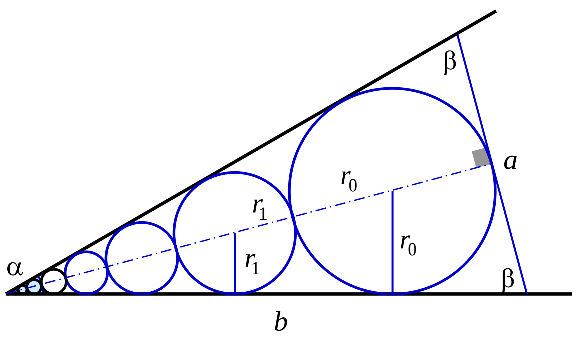
Окружность сродни бесконечности. Непонятно где начинается, и там же заканчивается.

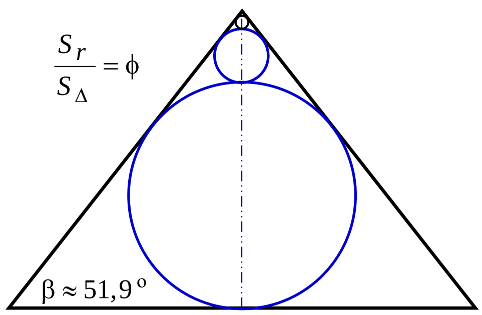
Ни начала, ни конца, ни края... Как круги ада по Данте.

Ряд кругов в угле.

Пусть в угол α вписана бесконечная последовательность окружностей так, что каждая окружность (за исключением исходной) касается двух соседних и сторон угла.

К начальному кругу проведем касательную. Она перпендикулярна биссектрисе угла.





В образованном равнобедренном треугольнике угол $\beta = 90^\circ - \alpha/2$, $\sin \alpha/2 = \cos\beta$.
На основе пропорций найдем радиусы окружностей, n = 0, 1, 2, ...

$$\lambda = \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{r_{n+1}/\cos\beta}{r_n + r_{n+1} + r_{n+1}/\cos\beta} \quad \to \quad r_1 = r_0\lambda,\ \ldots\ r_n = r_{n-1}\lambda,\ \ \lambda = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}.$$

Площади кругов S_n образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

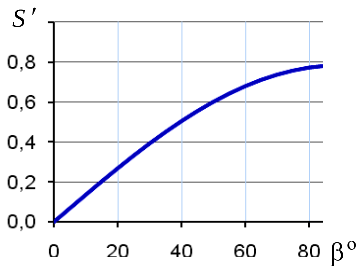
$$\pi r_0^2\left(1,\ q,\ q^2,\ \ldots\right),\quad q = \lambda^2$$

с общей площадью $\left(r_0 = 1,\ S_0 = \pi\right)$:

$$S_r = \frac{S_0}{1-q} = \pi\cdot\frac{1}{1-\lambda^2} = \pi\cdot\frac{(1+\cos\beta)^2}{4\cos\beta}.$$

Равнобедренный треугольник: основание $a = \dfrac{2r_0}{\operatorname{tg}\beta/2}$; боковая сторона $b = \dfrac{a}{2\cos\beta}$;
площадь, равная произведению полупериметра p на радиус вписанной окружности $r_0 = 1$

$$S_\Delta = p\cdot 1 = \frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta/2}\cdot\frac{1+\cos\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{\sin\beta}\cdot\frac{(1+\cos\beta)^2}{\cos\beta}.$$



Отношение площадей

$$S' = \frac{S_r}{S_\Delta} = \frac{\pi}{4}\cdot\sin\beta.$$

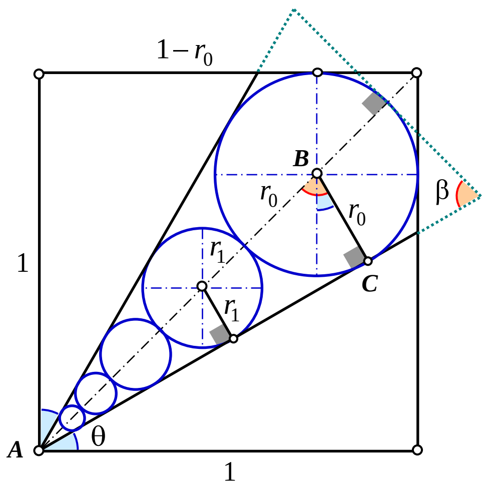
Если угол $\beta = \arcsin\dfrac{4\phi}{\pi}$, то

$$S' = \phi;\quad \alpha \approx 76{,}2^\circ;\quad \beta \approx 51{,}9^\circ.$$

Ряд кругов в квадрате – I.

Из вершины квадрата A размером 1×1 проведены две секущие под одинаковым углом наклона θ к его сторонам. В образованный угловой сектор вписана цепочка окружностей с убывающими радиусами r_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, как показано на рисунке.

Продлив секущие за пределы квадрата с образованием равнобедренного треугольника с углом при основании $\beta = 45^\circ + \theta$, можно использовать предыдущее решение, определив r_0.



Через гипотенузу треугольника ΔABC находим:

$$AB = d = \sqrt{2}\left(1 - r_0\right);$$

$$\cos\beta = \frac{r_0}{\sqrt{2}\left(1-r_0\right)} \qquad \underline{v = \cos\theta - \sin\theta} \quad \to \quad \begin{cases} r_0 = \dfrac{\sqrt{2}\cos\beta}{1+\sqrt{2}\cos\beta} = \dfrac{v}{1+v}; \\ \lambda_r = \dfrac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} = \dfrac{\sqrt{2}-v}{\sqrt{2}+v}; \end{cases}$$

$\lambda_r = \dfrac{r_{n+1}}{r_n}$ – отношение радиусов соседних окружностей.

Суммарная площадь кругов:

$$S_r = \frac{\pi r_0^2}{1-\lambda_r^2} = \frac{\pi\, v}{4\sqrt{2}}\left(\frac{v+\sqrt{2}}{v+1}\right)^2.$$

Максимум достигается при $\theta = 0$ и составляет $S_{r\,\max} = \pi\frac{3\sqrt{2}+4}{32} \approx 0{,}8092$.

Примечательно, что $S_{r\,\max} - \Phi/2 = 0{,}000202\ldots$

Можно сказать, практически безупречная точность 0,02 %, учитывая разный характер иррациональных чисел (Φ – алгебраическое число, π – трансцендентное), когда между ними отсутствует «аналитический паритет».

То есть в данной задаче золотое сечение становится индикатором экстремальных свойств. Причем без искусственной подгонки аналитической зависимости, которая естественным образом появляется в результате решения конкретной геометрической задачи.

Если последовательности кругов вписать в четыре угла квадрата относительно центрального круга диаметром 1, то их общая площадь составит $S = \pi\frac{3\sqrt{2}-2}{8} \approx 0{,}8807$.

Для сравнения относительная площадь фрактальных кругов, вписанных в правильный треугольник, равна $S'_\Delta = \pi\,\frac{11\sqrt{3}}{72} \approx 0{,}8313$.

Так, для угла $\theta = 30^{\circ}$ величина $v = \left(\sqrt{3}-1\right)/2$ и соответствующие параметры равны:

$$\lambda_r = \frac{2\sqrt{2}-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}-1\right)} \approx 0{,}5888;$$

$$r_0 = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}2679; \quad r_1 = \lambda_r r_0 \approx 0{,}1578;$$

$$S_r = \pi\left(\frac{7}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{23\sqrt{3}-39}{16}\sqrt{2}\right) \approx 0{,}3452.$$

Данный частный случай $\theta = 30^{\circ}$ исследовал известный американский популяризатор математики Michael Penn (Randolph College, Virginia) [1] с исходным условием: четверть окружности $A(C)$ проходит через точки касания начального круга и секущих, то есть $AC = 1$.

Действительно,

$$AC^2 = d^2 - r_0^2 = 2\left(1-r_0\right)^2 - r_0^2 = 2 - 4r_0 + r_0^2 \pm 2 = \left(2-r_0\right)^2 - 2.$$

Если угол $\theta = 30^{\circ}$, то

$$v = \left(\sqrt{3}-1\right)/2, \quad r_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}, \quad AC = 1$$

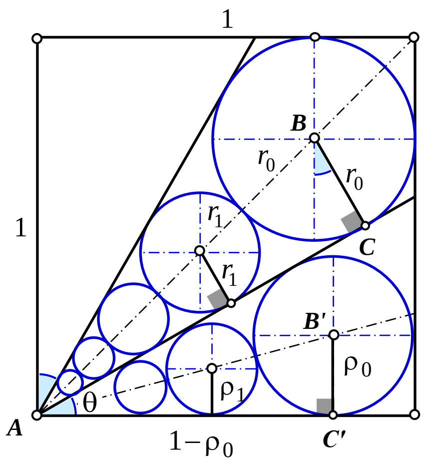
и значит, дуга с центром в точке A проходит через соседние вершины квадрата и точку C.

Однако неточности в составлении пропорции привели автора к ошибочному решению.

Число π – непременный и бессменный спутник площадей окружностей.

От него можно уйти, если сравнивать окружности или их наборы-последовательности.

Один из таких подходов заключается в дополнительном вписывании фрактальных кругов в квадрате выше и/или ниже секущих.



Примем угол $\gamma = \theta/2$.

Радиус начальной встроенной окружности равен

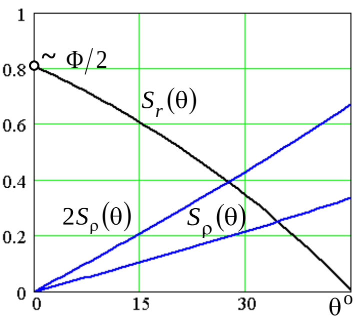
$$\rho_0 = (1-\rho_0)\,\mathrm{tg}\,\gamma \;\rightarrow\; \rho_0 = \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{1+\mathrm{tg}\,\gamma} = \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta+\sin\theta}.$$

Отрезки $AC' = 1-\rho_0$, $AB' = d' = (1-\rho_0)/\cos\gamma$.

Отношение радиусов соседних окружностей λ'_ρ находим из пропорции для $\Delta AB'C'$:

$$\lambda_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{d'-\rho_0-\rho_1}{d'} \;\rightarrow\; \lambda_\rho = \frac{1-\sin\gamma}{1+\sin\gamma}.$$

Суммарная площадь $S_\rho = \dfrac{\pi\rho_0^2}{1-\lambda_\rho^2}$.



Теперь можно сопоставлять площади S_r, S_ρ в разных вариациях.

Координаты центров окружностей вычисляются по рекуррентным формулам:

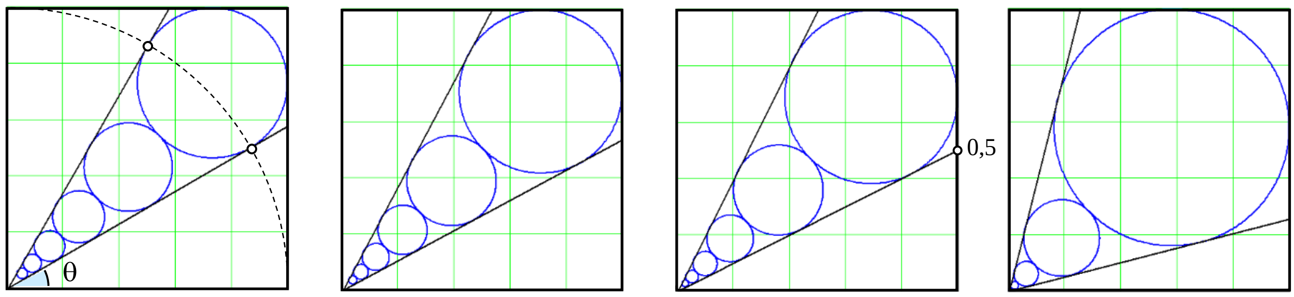
$$C_{r\,0} = (1-r_0;\; 1-r_0), \quad C_{\rho\,0} = (1-\rho_0;\; 1-\rho_0);$$

$$C_{r\,n} = \left(C_{r\,n-1} - (r_n + r_{n-1})/\sqrt{2};\; C_{r\,n-1} - (r_n + r_{n-1})/\sqrt{2}\right);$$

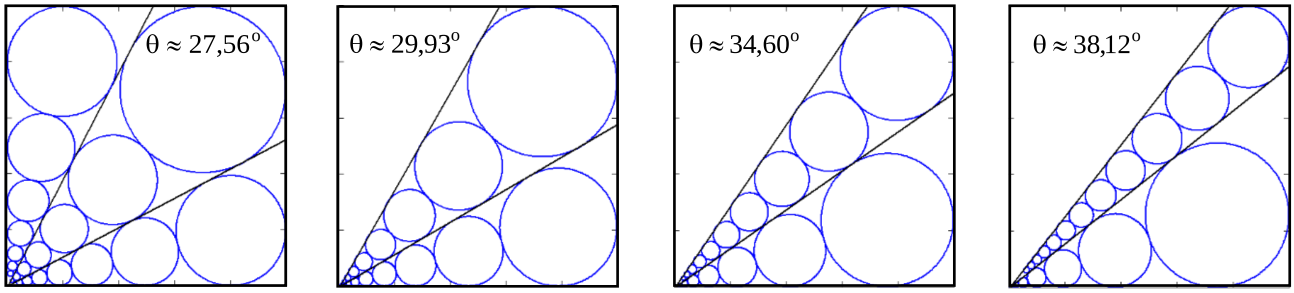
$$C_{\rho\,n} = \left(C_{\rho\,n-1} - (\rho_n + \rho_{n-1})\cdot\sin\theta/2;\; C_{\rho\,n-1} - (\rho_n + \rho_{n-1})\cdot\cos\theta/2\right).$$

Приведем некоторые характерные примеры:

$\theta = 30^\circ$; $S_r \approx 0{,}3452$ $\quad$ $\theta \approx 28{,}10^\circ$; $S_r = \phi^2$ $\quad$ $\theta \approx 26{,}57^\circ$; $S_r \approx 0{,}4109$ $\quad$ $\theta \approx 14{,}24^\circ$; $S_r = \phi$

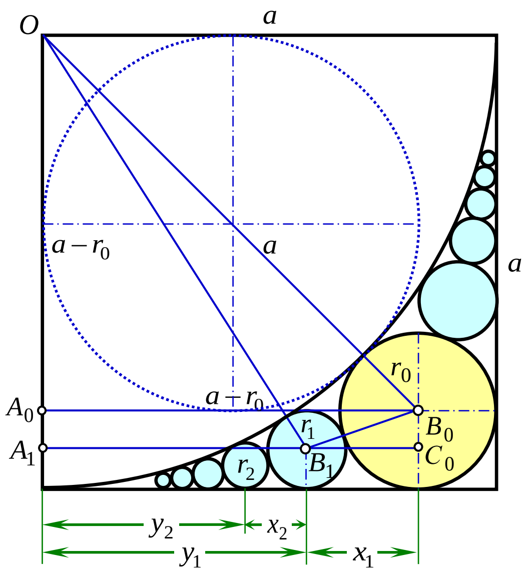


$S_r = 2\cdot S_\rho \approx 0{,}3922$ $\quad$ $S_r = \Phi\cdot S_\rho \approx 0{,}3466$ $\quad$ $S_r = S_\rho \approx 0{,}2508$ $\quad$ $S_r = \phi\cdot S_\rho \approx 0{,}1725$



Ряд кругов в квадрате – II.

В квадрате $a \times a$ проведена четверть окружности радиусом a. Между дугой и сторонами квадрата вписаны цепочки окружности с убывающими размерами. По характерным прямоугольным треугольникам находим аналитические формулы для радиусов окружностей:



1) $\Delta\, OA_0B_0$: $(a+r_0)^2 = (a-r_0)^2 + (a-r_0)^2 \quad \rightarrow$

$$r_0 = a \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \frac{a}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \frac{a}{c^2};$$

$\Delta\, B_1B_0C_0$: $x_1^2 = (r_0+r_1)^2 - (r_0-r_1)^2 \rightarrow x_1 = 2\sqrt{r_1 r_0}$.

2) $\Delta\, OA_1B_1$: $y_1^2 = (a+r_1)^2 - (a-r_1)^2 \quad \rightarrow y_1 = 2\sqrt{r_1 a}$;

$$x_1 + y_1 = 2\sqrt{r_1 r_0} + 2\sqrt{r_1 a} = a - r_0;$$

$$\sqrt{r_1} = \frac{\sqrt{r_0}}{1+\sqrt{r_0/a}}, \quad r_1 = \frac{a}{(c+1)^2}.$$

3) $\Delta\, OA_2B_2$: $x_2^2 = (r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2 \quad \rightarrow x_2 = 2\sqrt{r_2 r_1}$;

$\Delta\, B_2B_1C_1$: $y_2^2 = (a+r_2)^2 - (a-r_2)^2 \quad \rightarrow y_2 = 2\sqrt{r_2 a}$;

$\Delta\, OA_2B_2$: $x_2 + y_2 = 2\sqrt{r_2 r_1} + 2\sqrt{r_2 a} \; = \; y_1 = 2\sqrt{r_1 a}$;

$$\sqrt{r_2} = \frac{\sqrt{r_1}}{1+\sqrt{r_1/a}}, \quad r_2 = \frac{a}{(c+2)^2}.$$

Продолжая аналогичным образом, получаем рекуррентную и явную формы вычисления радиусов окружностей, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\sqrt{r_n} = \frac{\sqrt{r_{n-1}}}{1+\sqrt{r_{n-1}/a}}, \quad r_n = \frac{a}{(c+n)^2}, \quad c = \sqrt{2}+1.$$

Сумма площадей всех вписанных цветных кругов равна удвоенной сумме кругов (за вычетом "нулевого" r_0, во избежание двойного счета):

$$S_\Sigma = \pi a^2 \left(2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(c+n)^4} - \frac{1}{c^4} \right).$$

Сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(c+n)^s} = \zeta(s, c)$ – дзета-функция Гурвица (обобщенная дзета-функция Римана) [2, с. 652; 3], $s = 4, c = \sqrt{2}+1$.

С учетом свойства функции $\zeta(s, q+1) = \zeta(s, q) - q^{-s}$ получаем:

$$S_\Sigma = \pi a^2 \left[2 \cdot \zeta(4, \sqrt{2}) - \left(\sqrt{2}-1\right)^4 - 1/2 \right] \approx 0{,}17256.$$

Таким образом, вписанные круги занимают около 17,26 % площади квадрата.

Несмотря на обилие двоек, как ни крути, как не верти, но константой золотого сечения здесь даже не "пахнет". Конечно, хотелось бы заполучить нечто «этакое золотое». Но, увы.

Не всё коту масленица (Н.Островский). Не бывает всегда благоприятных ситуаций.

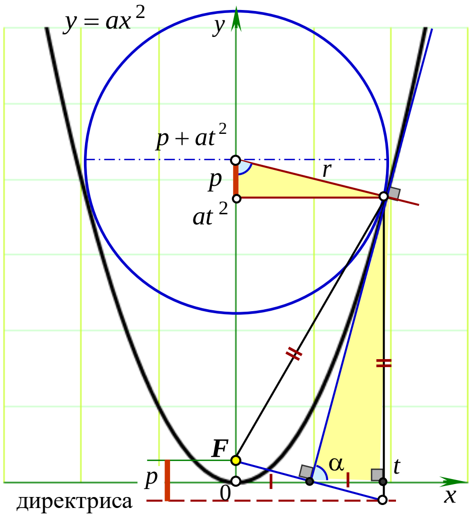
Впрочем, отрицательный результат – тоже результат, а одно поражение учит большему, чем 10 побед.

В чём же дело? – Двойки проявили себя уже постфактум в решении. А надо бы где-то в исходном построении, где им просто не нашлось места.

Ряд кругов в параболе.

Парабола и её объемный аналог эллиптический параболоид играют важную роль в физических процессах и широко применяются во многих инженерно-технических устройствах. В частности, любой предмет в поле тяготения перемещается по параболе. И конечно, уникальные оптические свойства. Все лучи, падающие параллельно оси параболы, отражаясь от параболы, проходят через ее фокус.

Внутрь параболы $y = ax^2$ помещены несовпадающие окружности O_n так, что O_n касается ветвей параболы и внешним образом окружности O_{n-1}. Найти радиусы.



Первоисточник данной задачи затерялся, хотя подобная формулировка предлагалась ещё на всероссийской студенческой олимпиаде 1987 года.

Совместим вершину параболы $y = ax^2$ с началом координат. Или в каноническом виде $y = \dfrac{x^2}{2p}a$, где $p = a/2$ – фокальный параметр параболы

Главное свойство параболы: каждая её точка равноудалена от фокуса F и директрисы $y_d = -p/2$.

Поместим внутрь параболы окружность, которая касается обеих ветвей параболы в некоторых точках, – пока с условными абсциссами $\pm t$.

Угловой коэффициент их общей касательной равен производной

$$y'(t) = \operatorname{tg}\alpha = 2at = t/p.$$

Поскольку $\dfrac{at^2}{2at} = \dfrac{t}{2}$, касательная делит отрезок 0-t пополам и является серединным перпендикуляром. Выделенные цветом прямоугольные треугольники подобны, так как имеют взаимно перпендикулярные стороны.

Меньший катет верхнего треугольника равен $t/\operatorname{tg}\alpha = p$.

К слову, деление отрезка 0-t пополам определяет геометрически точное прохождение касательной к точке параболы.

Можно несколько иначе. Перпендикуляр, проходящий через центр окружности, к касательной имеет отрицательный угловой коэффициент $-p/t$, а его уравнение (сдвиг вправо на t и подъем вверх на at^2):

$$y_\perp(x) = -\frac{p}{t}(x - t) + at^2 = -\frac{xp}{t} + p + at^2,$$

пересекая ось ординат ($x = 0$) в точке $p + at^2$.

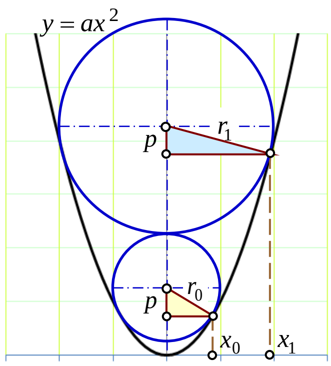
Таким образом, точка касания окружности с параболой не зависит от величины радиуса и лежит ниже её центра на расстоянии фокального параметра p.

Кривизна параболы в нулевой точке (вершине) равна $2a$, радиус кривизны $0{,}5/a = p$.

Одно из названий задачи: бросание окружностей внутри параболы.

Окружность «падает-проваливается до дна» и касается только нижней точки параболы, если её радиус не превышает фокальный параметр p. Окружность радиуса p с центром в точке (0; p) наилучшим образом приближает параболу в окрестности её вершины и, по сути, является окружностью кривизны для вершины параболы.

Далее рассмотрим несколько касающихся окружностей.



Из прямоугольных треугольников следует:

$$r_1^2 = x_1^2 + p^2, \qquad r_0^2 = x_0^2 + p^2 \quad \rightarrow \quad (r_1 - r_0)(r_1 + r_0) = x_1^2 - x_0^2 .$$

В то же время $r_1 + r_0 = ax_1^2 - ax_0^2$, откуда получаем: $r_1 - r_0 = 1/a$. То есть радиусы r_n образуют арифметическую прогрессию.

Для конкретной визуализации задаем коэффициент параболы a и радиус начальной окружности $r_0 \geq p$.

Тогда радиусы и ординаты центров окружностей вычисляются по аналитическим формулам:

$$r_n = r_0 + \frac{n}{a}, \qquad O_0 = ar_0^2 + \frac{1}{4a}, \qquad O_n = O_0 + 2nr_0 + \frac{n^2}{a} .$$

Если $a = 1,\ r_0 = 0.5$, то $r_n = 0.5 + n$, $O_n = 0.5 + n + n^2$.

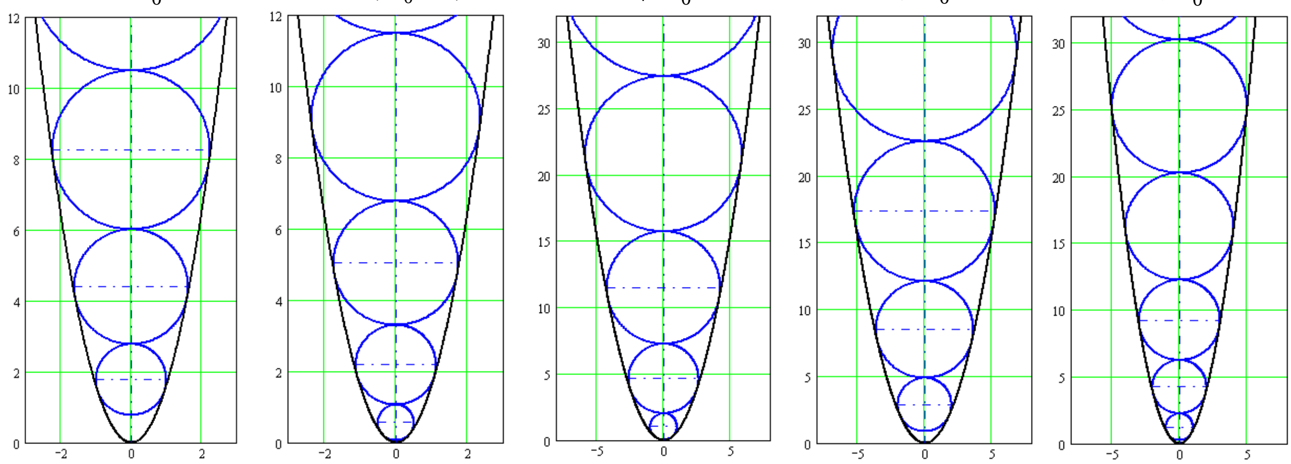
Рассмотрим золотоносные варианты.

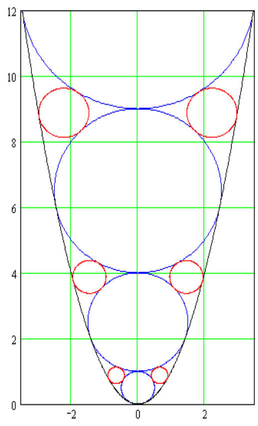
$$\begin{cases} y = \phi x^2 & \rightarrow \quad R_n = R_0 + \Phi n, \\ y = \Phi x^2 & \rightarrow \quad r_n = r_0 + \phi n, \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \frac{R_n - R_0}{r_n - r_0} = \Phi^2 .$$

Если $r_0 = R_0 = 1$, то

$$R_1 = 1 + \Phi = \Phi^2,\ R_2 = \Phi^2 + \Phi = \Phi^3,\ r_1 = 1 + \phi = \Phi \quad \rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{r_1}{r_0} = \Phi .$$

$a = \Phi,\ r_0 = 1$ | $a = \Phi,\ r_0 = 0{,}5$ | $a = \phi,\ r_0 = 1$ | $a = \phi,\ r_0 = 2$ | $a = 1,\ r_0 = 1$





В криволинейные треугольники, образованные ветвями параболы и соседними окружностями, также можно вписать окружности O'_n с координатами центра и радиусами:

$$\left(O'_{x\,n};\ O'_{y\,n};\ \rho_n\right) = \left(\pm\frac{3}{4}\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}};\ n^2 - \frac{1}{8};\ \frac{n}{4}\right).$$

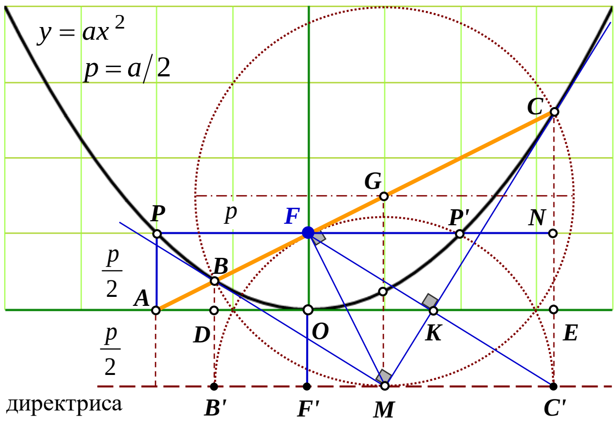
Далее допустимо вписывать окружности в криволинейные треугольники, ограниченные тремя окружностями, с использованием теоремы Декарта о четырех взаимно касающихся окружностях.

Данные процессы можно продолжать до бесконечности, получая фрактальные структуры. Чего в них больше, спортивно-математического азарта или реально-практической пользы-применимости, покажет время.

Золотое сечение и парабола.

Геометрический объект «ЗС – парабола» хорошо описан Андреем Ковалевым [4].

Не грех воспользоваться основными результатами его работы, максимально сохранив обозначения характерных точек для сопоставимости результатов.



Исходя из свойств параболы, отрезки равны:

$$FO = p/2,\quad FA = p\sqrt{5}/2,\quad FB = BD + p/2.$$

В треугольнике FAO найдем отношение

$$\lambda = \frac{BD}{FO} = \frac{FA - FB}{FA} = \frac{p\sqrt{5}/2 - BD - p/2}{p\sqrt{5}/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} - \lambda - 1}{\sqrt{5}} \quad \to \quad \lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = \phi^2.$$

Значит, $D = g(OA)$, $B = g(FA)$.

Кроме того, $CN = CF - p$. Составляем пропорцию и находим:

$$\frac{CF}{CN} = \frac{FA}{FO} \quad \text{или} \quad \frac{CF}{CF - p} = \sqrt{5} \quad \to \quad CF = \frac{p\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{p\sqrt{5}}{2} \cdot \Phi = FA \cdot \Phi.$$

То есть наличествует ещё пара золотых сечений: $F = g(CA) = g(NP)$, $O = g(EA)$.

Итак, имеем два золотых коридора CFA и FBA: любые коллинеарные отрезки, заключенные между параллельными линиями, которые проходят через эти точки, образуют золотую пропорцию.

Касательные в концах фокальной хорды параболы пересекаются на директрисе параболы под прямым углом в точке M.

В прямоугольных треугольниках ΔCMB, $\Delta FNC'$ отношение катетов равно константе золотого сечения Φ: $M = g(CMB)$, $N = g(FNC')$.

Проведенные в них высоты из прямого угла на гипотенузы дополнительно делят на треугольники с тем же отношением и т.д.

Например, $F = g(CFM) = g(MFB)$, $K = g(FKM) = g(CKF)$.

Проведенная через фокус окружность $M(FB'C'P')$ с центром в точке M всегда проходит через точки B', C' (проекции точек касания B и C на директрису), а также через точку P' пересечения прямой PF и параболы.

Последнее вытекает из равенства прямоугольных треугольников $\Delta FAO = \Delta FF'V$ (по равным катетам и острым углам с взаимно перпендикулярными сторонами), значит,

$$F'M = p/2 \ \text{и} \ FM = FA = P'M = p\sqrt{5}/2.$$

Отрезок, соединяющий середину произвольной хорды параболы (включая фокальную) и точку пересечения M касательных к ней в концах этой хорды, перпендикулярен директрисе, а его середина лежит на параболе.

Следовательно, можно провести окружность $G(CMB)$ диаметром $BC = p \cdot 5/2$.

Обе окружности пересекаются на касательной к вершине параболы.

Резюме.

Бог положительно оценивал созданный им мир, хотя и не доводил его до совершенства:

«И увидел Бог всё, что Он создал, и вот, хорошо весьма» (Быт. 1:3).

Мы также с удовлетворением воспринимаем работу, проделанную нами и другими авторами по бесконечным цепочкам-последовательностям вписанных кругов.

Установленные закономерности лаконичны.

В них неплохо "вписываются" золотоносные отношения. – Окей.

Но ещё не вечер, ещё светла дорога (И. Резник)...

To be continued...

Литература:

1. Michael Penn. A really cool geometry puzzle. 22 January 2023. № 55. – www.youtube.com/playlist?list=PL22w63XsKjqyZZAicSHbpVhJzLPfPMJf6.

2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

3. Sondow Jonathan, Weisstein Eric W. Hurwitz Zeta Function. From MathWord – A Wolfram Web Resource. – mathworld.wolfram.com/HurwitzZetaFunction.html.

4. Ковалев А.Н. Золотое сечение и парабола, как геометрический объект // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24631, 11.07.2018. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00163743.htm.

Украина, Харьков