С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 9. Пентагоны

Для постройки пентагона нужно соединить
точки на циферблате через каждые 12 минут.

Принципиально про обобщение.

Обобщение понятия – это логическая операция, противоположная ограничению.

Представляет собой переход от видового понятия к родовому аналогу, путем отбрасывания от его содержания какого-либо признака.

Лишившись набора характерных признаков, содержание понятия уменьшается.

Но при этом автоматически увеличивается объем понятия.

Из видового состояния оно становится родовым, то есть обобщается.

Так, если от содержания понятия «золотое сечение» отбросить признак "золотое", то оно превратится в понятие "сечение", которое становится родовым по отношению к исходному видовому понятию "золотого сечения".

Или наоборот. Родовому понятию "сечение", коих тьма тьмущая, не счесть, добавляем признак "золотое" с четким априори заданным правилом составления уникальной пропорции. Если хотим несколько разнообразить свой выбор, например, математической пропорцией на основе квадратного уравнения и/или тринома, то получаем новые расширенные семейства сечений: квадратичные, триномиальные, *p*-сечения и т.п.

Всё вразумительно, ясно, без логических противоречий и тавтологии.

Надуманный термин "обобщенное золотое сечение", которым некоторые уважаемые авторы АТ многие годы вводили в заблуждение доверчивых читателей, алогичен в принципе.

Заведомо неверное словосочетание, лишенное содержания.

В подобном лжеобобщении нет ни смысла, ни толики новизны. Только неуемное стремление прикрыться броской позолотой и маской научного изложения, чтобы хоть чем-то разбавить практический вакуум. Лишь бы "золотое сечение" прозвучало. Так он уже застолблено за уникальной константой. Всё. Finita la commedia.

Точно так же, как нет обобщенных чисел Фибоначчи. Обобщенные последовательности Фибоначчи есть, сколько угодно, на любой вкус. *Числа Фибоначчи* уникальны и составляют единственный и четко определенный целочисленный ряд: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Пентагон – кладезь проявлений золотой пропорции.

Математический феномен, который мы сегодня называем золотым сечением (ЗС) и/или золотой пропорцией (отношением), в определенном смысле появился случайно. Как сопутствующий результат геометрической задачи – построения правильного пятиугольника.

Восторженные эпитеты гармонии, красоты, божественности и т.п. пришли уже потом, как дань уважения экзальтированных почитателей.

Ничего похожего объективно нет. Только субъективные восприятия-переживания. Во многом с дутой и притянутой за уши гармонией.

В той же гармонии – родоначальнице звуковысотной системы музыки – золотое сечение, так таковое, отсутствует. Там другие отношения: терции, кварты, квинты, октавы...

Золотая пропорция, как наипростейшая наряду с делением пополам, была на виду ещё в античные времена. Её хорошо знали, через неё "перешагивали", не придавая значения.

Древние ученые больший интерес проявляли к арифметической, геометрической, гармонической и другим пропорциям и средним [1], включая отношения в целых числах.

В предыдущих частях работы продемонстрировано множество разных вариантов-комбинаций построения золотого сечения, наряду с общеизвестными традиционными способами.

Конечно, это не обобщение, а лишь расширение возможностей проявления. Поскольку суть одна: деление пополам и/или равенство нескольких отрезков, на основе которых и формируется золотая пропорция.

То есть неизменным спутником и родоначальником ЗС по-прежнему остается отношение длин 1:2, скрытое или явное.

Само по себе золотое сечение – по сути, частная задача [2].

Исторически она возникла ещё в античности при построении строптивого правильного пятиугольника. Уж больно эта геометрическая фигура задевала своим неподдающимся построением самолюбие древних ученых на фоне правильного треугольника, квадрата и шестиугольника.

Но без пентагона никак не обустраивалась теория правильных многогранников – Платоновых тел. Собственно и всё.

После того как научились чертить правильную пятиконечную звезду, деление в крайнем и среднем отношении было забыто на многие века. За ненадобностью.

Никакой золотой эйфории в традиционном делении не было и в помине. Потому такое разбиение вторично.

В англоязычной литературе основное распространение получил термин «золотое отношение» (golden ratio) для любой структуры с проявлением "золотоносных" свойств, как в сторону пропорционального роста-увеличения, так и деления-сечения.

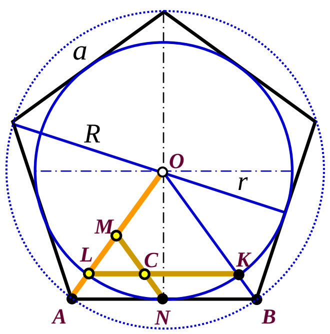
И это правильно. – Final and without appeal.

Новый пример ЗС в правильном пентагоне.

В равнобедренном треугольнике, образованном двумя радиусами описанной окружности R и стороной a правильного пентагона, Tran Quang Hung выделил [3, № 2] два дополнительных ЗС.

Расширим задачу, одновременно упростив доказательство.

Пусть точка M – середина радиуса $OA = R$.



В равностороннем пятиугольнике радиусы вписанной r и описанной R окружности связаны формулой $r = R\cdot\Phi/2$ или $r/(R/2) = \Phi$, то есть $M = g(OL)$ – золотое сечение отрезка $OL = r$.

Пусть точка N – середина стороны AB.

По построению $LK \parallel AB$ и $MN \parallel OB$.

Из подобия треугольников $\Delta OAB \sim \Delta OLK \sim \Delta MLC$ следует:

$$C = g(KL),\quad C = g(MN),\quad L = g(MA).$$

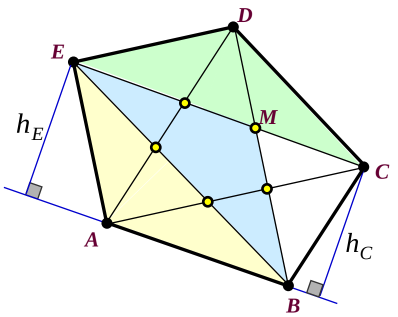
Если $r = 1$, то радиус $OA = R$ делится на три золотых отрезка

$$R = \phi + \phi^2 + \phi^3 = 2\phi.$$

Неправильный пентагон.

Любопытная задача с необычным решением описана в широко известной книге Виктора Прасолова [4, с. 82, 90-91]: найти площадь выпуклого пятиугольника S_5, если каждая его диагональ отсекает от него треугольник площадью 1.

В пентагонах с таким свойством диагонали параллельны сторонам, а точки пресечения диагоналей делят их в золотой пропорции.



Из равенства площадей треугольников $S_{ABC} = S_{ABE}$ следует равенство высот $h_C = h_E$, значит, $CE \parallel AB$.

Остальные диагонали также параллельны соответствующим сторонам.

$ABME$ – параллелограмм $\to$ $\Delta AEB = \Delta MEB$.

Обозначим площадь $x = S_{BCM}$, тогда

$S_5 = S_{AEB} + S_{MEB} + S_{DEC} + x = 3 + x$.

С другой стороны, $S_{\underline{BM}C} / S_{\underline{DM}C} = BM / DM = S_{\underline{BE}M} / S_{\underline{DE}M}$.

$BCDE$ – трапеция $\to$ $S_{DEM} = S_{BMC} = x$ или в x-обозначениях:

$$x/(1-x) = 1/x \;\to\; x^2 + x - 1 = 0 \;\to\; x = \phi .$$

Отсюда следует: $M = g(BD)$ и $S_5 = 3 + \phi = 1 + \Phi^2$.

Ремарка. Стороны, диагонали и высоты правильного пятиугольника образуют различные целочисленные углы (в градусах), среди которых наиболее распространены 18, 36, 54, 72 градусов.

Значения основных тригонометрических функции для этих углов имеют аналитический вид, где ключевым числом является корень из пяти $\sqrt{5} = \phi + \Phi$:

α°	18	36	54	72
sin α	$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\phi}{2}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}} = s$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\Phi}{2}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}} = s\Phi$
cos α	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}} = s\Phi$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\Phi}{2}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}} = s$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\phi}{2}$

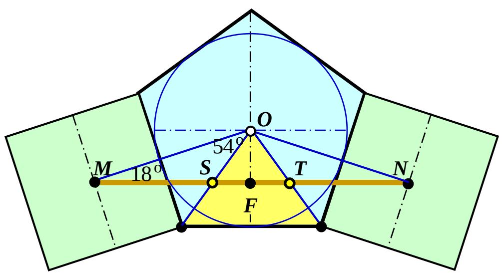
$s = \sin 36^{\circ} = \sqrt{2-\phi}/2$.

Пентагон и два квадрата.

Просто и симпатично смотрится пентагон в сочетании с другими правильными многоугольниками, в частности, квадратами и треугольниками.

Например, пристроим к сторонам правильного пентагона два квадрата [3, № 54].

Центры трех геометрических фигур соединим между собой.



По теореме синусов:

$\Delta\, OMS$: $\dfrac{OS}{MS} = \dfrac{\sin \angle OMS}{\sin \angle MOS} = \dfrac{\sin 18^{\circ}}{\sin 54^{\circ}}$;

$\Delta\, OSF$: $\dfrac{FS}{OS} = \sin 54^{\circ}$.

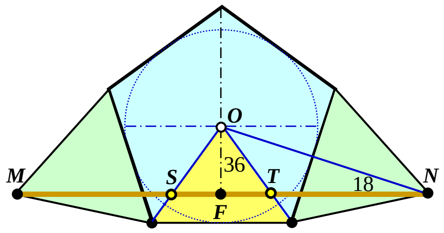
Перемножим два равенства:

$$\frac{FS}{MS} = \frac{ST/2}{MS} = \sin 18^{\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\phi}{2} \;\to\; \frac{ST}{MS} = \phi :$$

$S = g(MT)$, $T = g(NS)$.

Пентагон и два треугольника.

К сторонам пентагона пристроены два правильных треугольника [3, № 55].



$$OF = ON \cdot \sin 18^{\circ},\ FN = ON \cdot \cos 18^{\circ};$$

$$FT = OF \cdot \mathrm{tg}\, 36^{\circ} = ON \cdot \sin 18^{\circ} \cdot \mathrm{tg}\, 36^{\circ}.$$

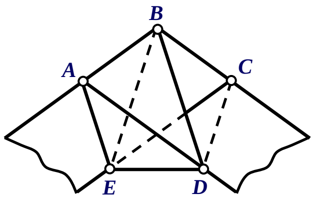
$$\frac{NT}{ST} = \frac{FN - FT}{2 \cdot FT} = \frac{FN/FT - 1}{2} = \frac{\mathrm{ctg}\, 18^{\circ} \cdot \mathrm{ctg}\, 36^{\circ} - 1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s\Phi}{\phi/2} \cdot \frac{\Phi}{2s} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\Phi^3 - 1 \right) = \Phi.$$

$$S = g(MT),\quad T = g(NS).$$

Узел-пентагон.

Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем стянута так, чтобы узел стал плоским. – Узел имеет форму правильного пятиугольника [4, с. 158, 174].



По формуле площади треугольника, из равенства двух высот вытекает равенство сторон, на которые опущены эти высоты. Рассматривая тупоугольные треугольники (с общей вершиной *B*) *BAE*, *BAC* и *BDC*, получаем соответственно равные стороны: *EA* = *AB*, *AB* = *BC* и *BC* = *CD*.

Значит, трапеции *ABCE* и *ABCD* – равнобедренные, то есть $\angle A = \angle B = \angle C$.

В остроугольных треугольниках *BAD* и *BCE* аналогично получаем *AD* = *BD* и *BE* = *CE*.

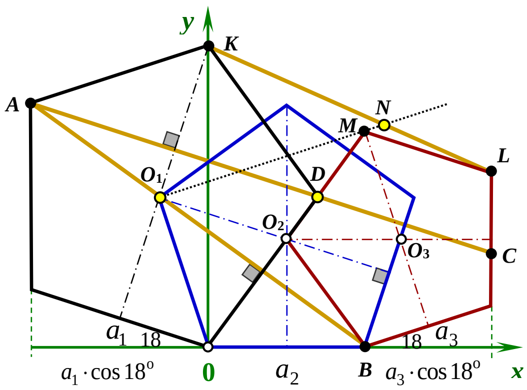
Так как треугольники *EAB*, *ABC*, *BCD* равны, то *BE* = *AC* = *BD*.

Поэтому *AD* = *BE* и *BD* = *CE*, то есть трапеции *ABDE* и *CDEB* – равнобедренные.

Следовательно, в пятиугольнике *ABCDE* равны все стороны и углы, то есть он правильный. Со всеми вытекающими последствиями.

Три правильных пентагона – I.

Привлекательной и многообещающей выглядит конфигурация Tran Quang Hung из трех правильных пятиугольников с центрами $O_i,\ i = 1, 2, 3$ [3, № 62]. Правда, без решения.



Пусть (a_i, d_i, r_i, R_i) – сторона, диагональ, радиус вписанной и описанной окружности *i*-го пентагона, $q = 1/\sqrt{2 - \phi} = \left(2 \cdot \sin 36^{\circ}\right)^{-1} \approx 0{,}85065$.

Без потери общности примем $a_1 = 1$.

Для пентагона справедливы формулы:

$$a_i = d_i \phi = R_i \sqrt{2 - \phi},\ r_i = R_i \cdot \Phi/2.$$

По построению: $a_2 = R_1 = q$, $a_3 = R_2 = q^2$, то есть стороны пентагонов образуют убывающую геометрическую прогрессию $(a_1, a_2, a_3) = (1, q, q^2)$.

1) $AO_1 = R_1,\ BO_1 = d_2 = a_2\Phi = R_1\Phi \quad \rightarrow \quad O_1 = g(BA)$.

2) Суммарная ширина конструкции из трех пентагонов:

$$a = (a_1 + a_3) \cdot \cos 18^{\circ} + a_2 = \Phi^2 \cos 18^{\circ} = s\Phi^3.$$

$$AC = \frac{a}{\cos 18^o} = 1 + q^2 + \frac{q}{\cos 18^o} = \Phi^2, \; AD = d_1 = \Phi \to \; D = g(AC), \;\; DC = \Phi^2 - \Phi = 1.$$

3) Координаты точек:

$$K(0, d_1) = K(0, \Phi);$$

$$L\left(q + q^2 \cos 18^o \; ; \; q^2 + q^2 \sin 18^o\right) = L\left(q\,(1+\Phi/2); \; q^2(1+\phi/2) \right);$$

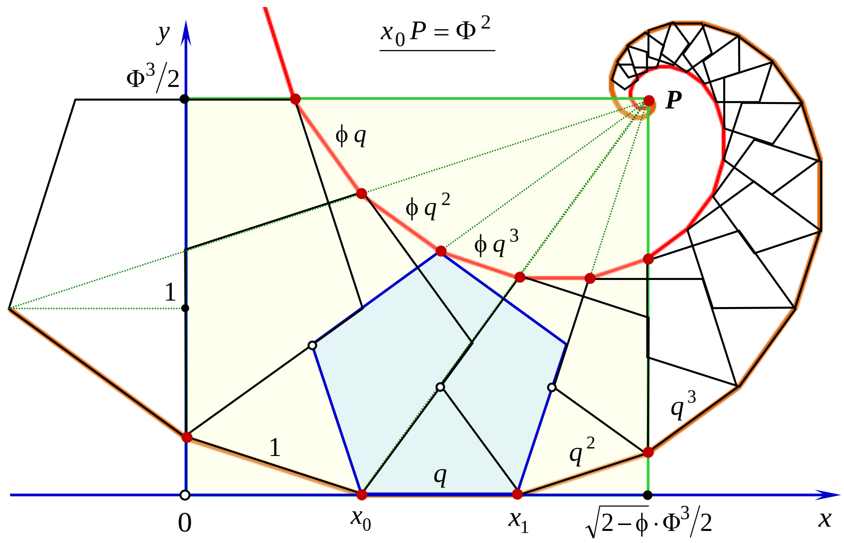
$$O_1\left(-R_1 \sin 18^o \; ; \; R_1 \cos 18^o\right) = O_1(-q\,\phi/2\,; \; \Phi/2); \quad M(a_2; \; d_3) = M\left(q\,; \; q^2\Phi\right).$$

$N\left(q\cdot(\phi + 1/2); \; \dfrac{7\phi - 1}{4 - 2\phi} \right)$ – точка пересечения отрезков KL и O_1M.

Сравнив абсциссы точек $K, N, L,$ получаем $N = g(KL)$.

Явно напрашивается расширение задачи на построение последовательного ряда пентагонов согласно принятому алгоритму:

- сторона пентагона равна радиусу описанной окружности предыдущего $a_n = R_{n-1}$;
- угол поворота вокруг центра на каждом шаге составляет $-\pi/10 = -18^o$.



Последовательность пентагонов сходится к аттрактору (полюсу) P с координатами:

$$\left(p_x\,; p_y\right) = \left(a\,; \; h_0 + a_1 \cdot \sin 18^o\right) = \left(\sqrt{2-\phi}; \; 1\right)\cdot \Phi^3/2 \approx (2{,}490; 2{,}118).$$

Координаты вершин при основании пентагона изменяются по рекуррентным формулам

$$x_{n+1} = x_n + q^{n+1} \cdot \cos(n\pi/10);$$

$$y_{n+1} = y_n + q^{n+1} \cdot \sin(n\pi/10)$$

и хорошо поддаются аппроксимации логарифмической (изогональной) спиралью в параметрической форме

$$x(t) = p_x - r(t)\cdot \cos t; \;\; y(t) = p_y + r(t)\cdot \sin\, t\,,$$

где $r(t) = c\cdot e^{b\cdot t}$ – радиус-вектор точки;

$b = q^4 = \Phi^2/5 \approx 0{,}5236$ – коэффициент, отвечающий за радиус витков;

$c = \dfrac{-p_y}{e^{b\cdot\tau}\sin\,\tau} \approx 0{,}0059526$ – коэффициент, который отвечает за расстояние между витками и находится из условия прохождения, например, через точку x_0 при $\tau = 4\pi - 3\pi/10$;

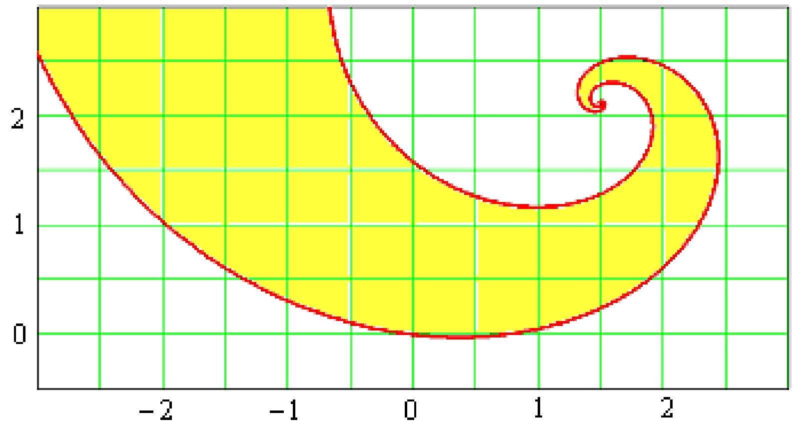
знак "минус" в формуле $x(t)$ разворачивает спираль по часовой стрелке.

Аналогичные спирали можно провести через другие вершины и/или центры фигур.

При этом коэффициент b остается неизменным, варьирует только величина c.

Так, для изогональной спирали, проходящей через вершину единичного пентагона с координатами $(x_0;\,\Phi)$, интервал между витками уменьшается:

$$\tau = 4\pi - \pi/10 \quad\rightarrow\quad c' = \frac{\Phi - p_y}{e^{b\cdot\tau}\sin\,\tau} \approx 0{,}0026475\,.$$



Пентагонально-золотой рог изобилия

Полученная фигура в изобилии наполнена пентагонами, коих не счесть. Собственно, они её и образуют. Здесь также бесконечное многообразие различных сочетаний чисел на основе золотой константы. Поэтому позволим себе лирическое отступление и дадим данному изображению название: «пентагонально-золотой рог изобилия».

Он существенно отличается от одиночных золотых спиралей, образованных масштабированными поворотами золотых прямоугольников и/или треугольников вокруг своих полюсов [5].

Посмотрите на него: не правда ли, в нём что-то есть? (А. Чехов, Попрыгунья).

Три правильных пентагона – II.

В другой конфигурации Tran Quang Hung [3, № 63] три правильных пентагона имеют одну общую вершину, а две пары фигур – также общую сторону. Через вершины G, F одного пентагона проведены две окружности: одна проходит через центры других пентагонов, другая через их вершины C, D', как показано на рисунке.

Автор выделил подмножество золотых сечений, в том числе: характерные отношения для любого правильного пятиугольника, а также несколько новых пропорций, обусловленных окружностями. Решение не приводит. Но дает общий посыл на возможность применения традиционного метода координат для задействованных точек и один пример расчета с громоздкими формулами.

В целом задача представляется нам весьма интересной, и есть резон провести её полную реконструкцию.

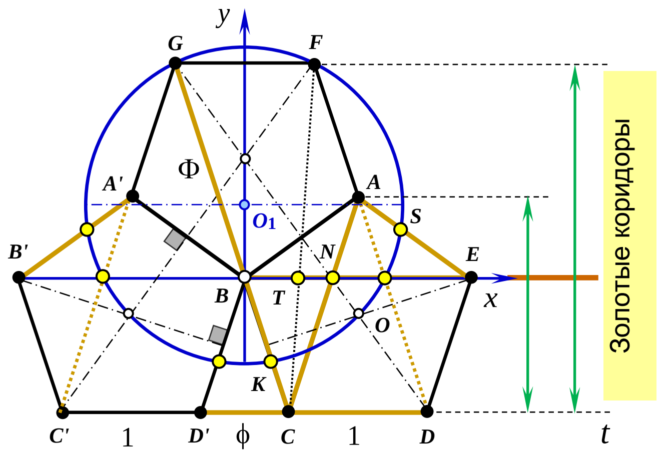
За начало координат выберем точку B – общую и единственную вершину пентагонов.

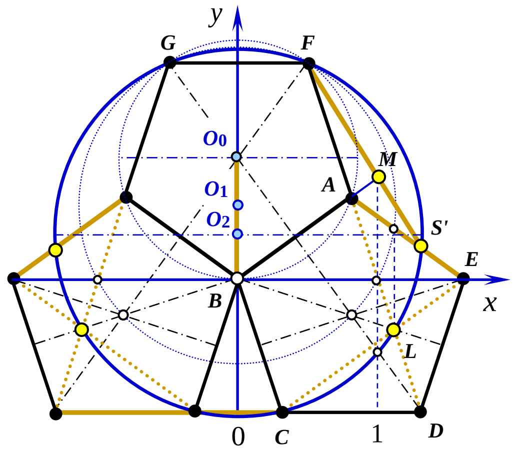
Без потери общности положим стороны фигур $a = 1$.
Обозначим числовые величины, производные от констант золотого сечения:

$$q = 1/\sqrt{2-\phi} = \left(2\cdot\sin 36^{\circ}\right)^{-1} \approx 0{,}851; \quad s = 1/(2q) = \sin 36^{\circ} = \sqrt{2-\phi}/2 \approx 0{,}588.$$

Сторона a, диагональ d и радиусы R, r окружностей пентагона связаны формулами:

$$a = d\phi = R\sqrt{2-\phi}, \quad r = R\cdot\Phi/2.$$





Для наглядности сопоставления и анализа сгруппируем характерные точки с их координатами в виде таблицы:

Точка	Абсцисса x_i		Ордината y_i	
A	$\Phi/2$	0,809	s	0,588
B	0	0	0	0
C	$\phi/2$	0,309	$-s\Phi$	$-0{,}951$
D	$1+\phi/2$	1,309	$-s\Phi$	$-0{,}951$
E	Φ	1,618	0	0
G	$-1/2$	$-0{,}500$	$s\Phi^2$	1,539
F	$1/2$	0,500	$s\Phi^2$	1,539
O	$\Phi/2$	0,809	$-q\phi/2$	$-0{,}263$
***O*₀**	0	0	q	0,851
***O*₁**	0	0	$q\phi$	0,526
***O*₂**	0	0	$q\phi^2$	0,325
S	$\phi+1/2$	1,118	$s\phi$	0,363
K	$\phi^2/2$	0,191	$-s$	$-0{,}588$
S′	$1+\phi/2=\Phi^2/2$	1,309	$s\phi^2$	0,225
M	1	1	$2s\phi$	0,727
L	$\phi+1/2$	1,118	$-s\phi$	$-0{,}363$

- Отношение диагонали к стороне равно константе золотого сечения $d/a = \Phi$.

Значит, любая секущая, проходящая через горизонтальные (противоположные) стороны соседних пентагонов, попадает в золотой интервал-коридор:

$$B = g(GC),\quad T = g(FC),\quad N = g(GD) \text{ и т.п.}$$

Аналогично диагонали в точке их пересечения делятся в золотой пропорции, образуя ещё один золотой коридор: $N = g(CA)$.

- Из свойства пересечения диагоналей также следует $N = g(EB)$ и параллельный перенос на линию t: $C = g(DD')$.

- С учетом равенства $\Phi = 1 + \phi$ на линии t имеются дополнительные золотые сечения

$$C = g(C'D) \text{ и } D' = g(DC').$$

- Из подобия $\Delta\, GFC \sim \Delta\, BTC$ вытекает: $BT = \phi^2$ и $\dfrac{B'T}{TE} = \dfrac{\Phi + \phi^2}{\Phi - \phi^2} = \Phi \;\; \rightarrow \;\; T = g(B'E)$.

Проверка, является ли точка $Z \in XY$ золотым сечением отрезка XY, осуществляется путем сравнения разности абсцисс и/или ординат этих трех точек, то есть проекций отрезка XY с его внутренней точкой Z на координатные оси.

- Центры окружностей O_1, O_2 расположены на оси y и определяются по трем точкам или вершинам $\Delta\, GFO$ и $\Delta\, GFC$ соответственно.

Ординаты центров O_0, O_1, O_2 равны $q \cdot (1,\ \phi,\ \phi^2)$, то есть имеем весьма знаменательные золотые сечения: $O_2 = g(BO_1)$, $O_1 = g(O_0, O_2) = g(BO_0)$.

Радиусы этих окружностей: $R_0 = q$, $R_1 = \sqrt{1 + (q\phi)^2}$, $R_2 = \sqrt{1 + q^2}$.

Примечательно, разность площадей большого и малого кругов равно числу π:

$$\underline{S_2 - S_0 = \pi}.$$

- Уравнение окружности O_1 ниже центра: $y_1(x) = q\phi - \sqrt{1 + (q\phi)^2 - x^2}$.

$y_1(1) = 0$, то есть окружность проходит через пересечение диагоналей AD и BE, деля их золотым сечением.

Окружность пересекает стороны пентагона $AE(x) = 2s(1 - \phi\, x)$ и $BC(x) = -2s\Phi^2 x$ в точках $S(\phi + 1/2;\ s\phi)$ и $K(\phi^2/2;\ -s)$. То есть $S = g(EA)$ и $K = g(BC)$.

Кроме того, сам отрезок SK делится осью x в золотой пропорции.

- Уравнение окружности O_2 ниже центра: $y_2(x) = q\phi^2 - \sqrt{1 + q^2 - x^2}$.

$y_2(\phi + 1/2) = -s\phi$, то есть окружность проходит через пересечение диагоналей AD и CE, деля их золотым сечением: $L = g(AD)$ и $L = g(CE)$.

Окружность пересекает сторону пентагона $AE(x) = 2s(1 - \phi\, x)$ в точке $S'(\Phi^2/2;\ s\phi^2)$, значит $S' = g(AE)$, $\Phi^2/2 = 1 + \phi/2$.

- Прямые $AB(x) = 2s\phi \cdot x$ и $FS'(x) = -x/q^3 + 4s$ пересекаются в точке $M(1;\ 2s\phi)$ так, что $M = g(FS')$.

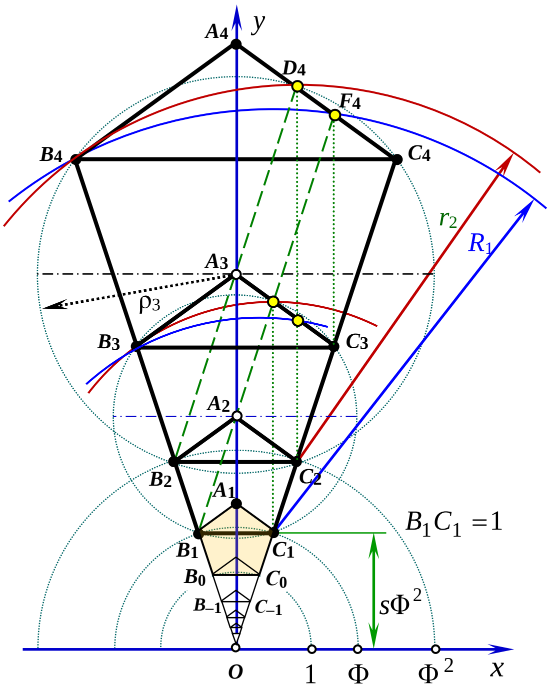
Примечательно также, что точки S и L симметричны относительно оси абсцисс.

Клонирование правильных пентагонов.

В задаче «три правильных пентагона – I» бесконечная последовательность пентагонов составлена так что, сторона одного пятиугольника равна радиусу описанной окружности соседней фигуры. Аналогичным образом можно выполнить геометрическое "клонирование", если сторона одного пятиугольника равна диагонали соседней фигуры [3, № 59].

То есть диагональ B_nC_n пентагона $A_nB_nB_{n-1}C_{n-1}C_n$ является стороной (основанием) смежного пентагона $A_{n+1}B_{n+1}B_nC_nC_{n+1}$, $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

В отличие от предшествующей спиральной формы, образованная конфигурация имеет линейный характер построения, геометрическую прогрессию размеров соседних пентагонов со знаменателем прогрессии, равной константе золотого сечения Φ, и обладает рядом новых полезных свойств, которые рассмотрим в общем виде.



Сторона $B_1C_1 = 1$ отстоит от начала координат на величину $1/2 \cdot \text{ctg}\, 18^\circ = s\Phi^2 \approx 1{,}539$.

Длина стороны $A_{n+1}C_{n+1} = B_nC_n = \Phi^{n-1}$.

Через вершину B_n проведены три окружности (дуги) $C_{n-3}(B_n), C_{n-2}(B_n), A_{n-1}(B_n)$ с центрами соответственно в точках $C_{n-3}, C_{n-2}, A_{n-1}$.

Первая из них пересекает сторону A_nC_n в точке F_n, две другие – в точке D_n, то есть

$$C_{n-3}(B_nF_n), C_{n-2}(B_nD_n), A_{n-1}(B_nC_nC_{n-2}B_{n-2}).$$

Радиусы окружностей:

$$R_n = C_nB_{n+3} = \Phi^{n+1}\sqrt{2+\Phi^2};$$

$$r_n = C_nB_{n+2} = \Phi^{n+1}\sqrt{1+\phi^2} = 2s\Phi^{n+1};$$

$$\rho_n = A_nB_{n+1} = \Phi^{n-1}.$$

Уравнения стороны и диагонали пентагона с угловым коэффициентом k:

$$k = -\text{tg}\, 36^\circ = -2s\phi \quad \to \quad A_nC_n(x) = -2s\phi\, x + A_{n\,y} = 2s(\Phi^n - \phi x);$$

$$k = \text{tg}\, 72^\circ = 2s\Phi^2 \quad \to \quad A_nB_{n-1}(x) = 2s\Phi^2 x + A_{n\,y} = 2s(\Phi^n + \Phi^2 x).$$

Сравнивая и решая уравнения фигур, удостоверяемся, что точки D_n, F_n действительно являются пересечением следующих прямых и окружностей:

$$D_n:\ A_nC_n,\ B_{n-2}A_{n-1},\ C_{n-3}(B_n),\ A_{n-1}(B_n);$$

$$F_n:\ A_nC_n,\ B_{n-3}A_{n-2},\ C_{n-2}(B_n).$$

В частности, $D_4:\ A_4C_4,\ B_2A_3,\ C_1(B_4),\ A_3(B_4);$

$$F_4:\ A_4C_4,\ B_1A_2,\ C_2(B_4).$$

Сравнение абсцисс показывает, что точки являются золотыми сечениями стороны A_nC_n:

$$D_n = g(C_nA_n),\quad F_n = g(A_nC_n).$$

При этом точки C_{n-2}, F_{n-1}, D_n имеют равные абсциссы.

Точка	Абсцисса					Ордината				
	формула	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	формула	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$\boldsymbol{A_n}$	0	0	0	0	0	$2s\Phi^{n}$	1,902	3,078	4,980	8,057
$\boldsymbol{B_n}$	$-\Phi^{n-1}/2$	–0,500	–0,809	–1,309	–2,118	$s\Phi^{n+1}$	1,539	2,490	4,029	6,519
$\boldsymbol{C_n}$	$\Phi^{n-1}/2$	0,500	0,809	1,309	2,118	$s\Phi^{n+1}$	1,539	2,490	4,029	6,519
$\boldsymbol{F_n}$	$\Phi^{n-2}/2$	0,309	0,500	0,809	1,309	$s\Phi^{n-1}(1+3\phi)$	1,678	2,714	4,392	7,106
$\boldsymbol{D_n}$	$\Phi^{n-3}/2$	0,191	0,309	0,500	0,809	$3s\Phi^{n-1}$	1,763	2,853	4,617	7,470

Выделим также равные окружности:

- $A_{n+1}(B_nC_n)=O(B_nC_n)$, поскольку $OB_nA_{n+1}C_n$ – ромб со стороной Φ^{n};
- $C_{n-1}(B_{n+1})=O(A_n)$, так как $r_{n-1}=A_{n\,x}=2s\Phi^{n}$.

Сумма оснований всех пентагонов, расположенных ниже $B_1C_1=1$, равна константе ЗС:

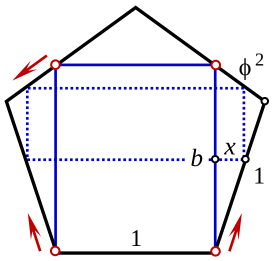
$$\sum_{n=-\infty}^{0} B_nC_n=\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{n}=\Phi .$$

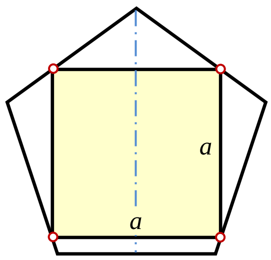
Квадрат в правильном пятиугольнике.

В задачнике В. Прасолова [4, с. 156, 171] есть утверждение:

в правильный пятиугольник можно вписать квадрат с вершинами на четырех сторонах пятиугольника; доказательство – логически-описательное.

Дадим аналитику решения с одновременным упрощением доказательства.





В пятиугольнике на его нижней стороне единичной длины достроим прямоугольник.

Его высота больше 1, поскольку внутренний угол пентагона тупой, $\cos 108^{\circ}=-\phi/2$, и по теореме косинусов равна

$$b=\sqrt{\phi^{4}+1+\phi^{3}}=\sqrt{2-\phi}=q^{-1}\approx 1{,}176 .$$

Сужаем прямоугольник по вертикали и одновременно расширяем по горизонтали так, чтобы вершины непрерывно скользили вдоль четырех боковых сторон пентагона, пока прямоугольник не превратится в линию – диагональ длиной $\Phi=1+\phi$.

Естественно, что найдется некое положение, когда прямоугольник станет квадратом.

Обозначим сдвиг нижней точки вправо через x, $0\le x\le\phi/2$.

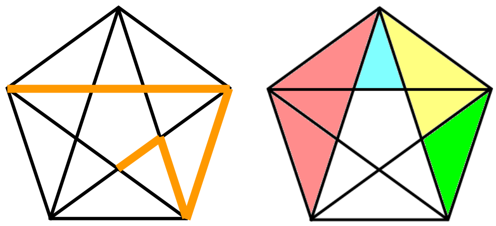
Ширина прямоугольника увеличивается $1+2x$, высота уменьшается $b(1-2\Phi x)$.

Квадрат образуется, если $1+2x=b(1-2\Phi x)$, откуда $x=0{,}5\dfrac{1-q}{\Phi+q}\approx 0{,}030$.

Окончательно, сторона вписанного квадрата $a=\dfrac{1+\phi}{1+q\phi}\approx 1{,}060$.

Типоразмеры.

В пентагоне с диагоналями хорошо известны характерные отрезки с убывающими в Ф раз длинами. Представляют интерес также пять типоразмеров треугольников.



Самый большой белый треугольник имеет площадь в Ф раз больше, чем красный, площадь которого в Ф раз больше, чем у желтого треугольника.

В свою очередь площадь желтого треугольника в Ф раз больше зеленого, площадь которого в Ф раз больше, чем у самого маленького голубого треугольника. – Вот такой чудесный коленкор.

Окей. Всё замечательно. Можно объявить небольшой перерыв.

To be continued...

Литература:

1. Василенко С.Л. Средние значения и математические пропорции: от Античности до наших дней // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22763, 28.11.2016. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163146.htm.

2. Василенко С.Л. Метаморфозы представлений: от деления в крайнем и среднем отношении – до золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22463, 01.09.2016. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163040.htm.

3. Cut the knot. Golden Ratio in Geometry. – cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml.

4. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учеб. пособие. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2006. – 640 с.

5. Белянин В.С. Таинство чисел золотой пропорции. 4. Золотые полюса остроугольного треугольника // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. – www.artmatlab.ru.