С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 5. Экстремальные свойства квадратов

Квадрат – зародыш всех возможностей
(К. Малевич)

О бедном квадрате замолвите слово...

Выражение родилось [1] в связи с приданием эфемерной фундаментальности неким «металлическим пропорциям», которым отдельные адепты тщетно пытаются навязать алогичный статус обобщенных золотых сечений. Тем самым отмежевываясь от современной математики и создавая собственный иллюзорный ареал "математики гармонии".

Хотя в действительности речь идет о заурядных пропорциях, обусловленных квадратным уравнением общего вида.

Математическая модель квадратного уравнения действительно стала замечательным триумфом абстрактного человеческого мышления. Без надуманного обобщения ЗС и отдельно взятой науки о гармонии систем. Ясно как день, и ежу понятно, что уникальное золотое сечение возникает внутри квадратичной структуры, а не наоборот.

А вот появление квадрата в социуме остается загадкой. Ведь он не имеет природных аналогов, в отличие от другой идеальной фигуры – круга, который могли "срисовать" с Солнца, расходящихся волн после падения предмета на поверхность воды и т.п.

Что необычного в «черном квадрате» Малевича? – Хотя на самом деле он вовсе не черный и нисколько не квадрат. В нём удивительным образом сошлись и сконцентрировались время и пространство, различные точки восприятия и возможности.

Из темного четырехугольника черный квадрат превратился в символ. Заслуженно.

Квадрат – это первоформа. Круг вторичен, и появляется как производная форма при вращении квадрата на плоскости. – Так неявно решается квадратура круга.

«Круг – это квадрат, которому вскружили голову» (Б.Кригер).

Кругами нельзя замостить плоскость, квадратами – элементарно.

Круг не круглируется, квадрат квадрируется. То есть круг нельзя разделить на более мелкие круги. Квадрат можно. В частности, голландский математик A.Duijvestijn разбил квадрат на 21 попарно неравных квадратов [2] с целочисленными площадями и доказал, что найденное разбиение единственное. Совершенного квадрата меньшего порядка не существует.

Большинство ассоциаций с окружностью носят негативно-ироничный характер. Порочный круг в логике, заколдованный круг в оценке безысходности, безвыходного положения и/или неразрешимой задачи. Голова идет кругом, круг замкнулся, ходить вокруг да около, обвести вокруг пальца, круглый идиот, круглый сирота ...

Сравните: безупречен как квадрат, и рукой, и ногой, и мыслью (др. греч. поэт).

В состоянии удивления-изумления глаза становятся круглыми, потом квадратными.

Знаменитая теорема Пифагора уравнивает квадраты, построенные на сторонах прямоугольного треугольника.

По теореме Бойяи–Гервина любой многоугольник равно-составлен квадрату, то есть его можно разрезать на конечное число частей, из которых составляется квадрат.

Математический метод наименьших квадратов применяется для аппроксимации целевых функций путем минимизации суммы квадратов отклонений от исходных данных.

Рекуррентное возведение в квадрат в комплексной области порождает уникальное множество Мандельброта.

Квадрат – родоначальник многих головоломок: магические или волшебные квадраты, истоки которых лежат в глубокой древности (более 4 тыс. лет), латинские квадраты, судоку.

Круг безальтернативен. Квадрат – одновременно ромб, прямоугольник и параллелограмм. Сторону квадрата можно вычислить через его периметр, площадь, диагональ, радиусы вписанной и описанной окружности.

"Сторона" круга определяется только через число π, которое универсально и является предельной константой не только для окружности. Например, решение гениального Эйлера (1735) базельской задачи о бесконечном ряде обратных квадратов

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots = \pi^2/6.$$

Как видим, окружностью здесь и не пахнет. Более того, сумма ряда становится первичной и предопределяет «арифметическую квадратуру круга», а именно: шестикратная сумма ряда равна квадрату периметра круга диаметром 1.

Что здесь первично, круг или квадраты – вопрос риторический.

В сказке Л.Кэрролла «Алиса в стране чудес» синяя гусеница советует девочке: «Откусишь с одной стороны – подрастешь, с другой – уменьшишься». – Речь шла о круглой шляпке гриба с непонятными сторонами. По замыслу писателя, игра слов и полный абсурд.

Более эффектно выглядит путаница с квадратным кусочком торта. – Вроде и стороны есть. Но где у него одна сторона, а где другая, – большой вопрос? – То есть с квадратом ситуация выглядит более реалистично, но неопределенно. Тонкий шарм и неясность.

В отличие от феерического круга, квадрат всё-таки более определен. Например, «Откусишь со стороны – подрастешь, откусишь с уголка – уменьшишься».

Не станем более сталкивать лбами круг и квадрат. Они великолепны.

Вспомним хорошо известные экстремальные свойства квадратов в геометрии.

Среди всех четырехугольников квадрат имеет:

- наименьший периметр при фиксированной площади;
- наибольшую площадь при заданном периметре;
- наибольшую осевую симметрию: ось симметрии четвертого порядка перпендикулярную плоскости квадрата, и четыре оси симметрии второго порядка (две вдоль диагоналей и две параллельно сторонам).

Пожалуй, всё. Но можно развить настоящие тезисы за счет увеличения степеней свободы, в разных сочетаниях квадратов. Этим дальше и займемся...

Два квадрата в полукруге.

В полукруг встроены два квадрата (рис. 1). В общем случае их стороны $a \leq b$.
Найдем характерные взаимосвязи и соотношения.

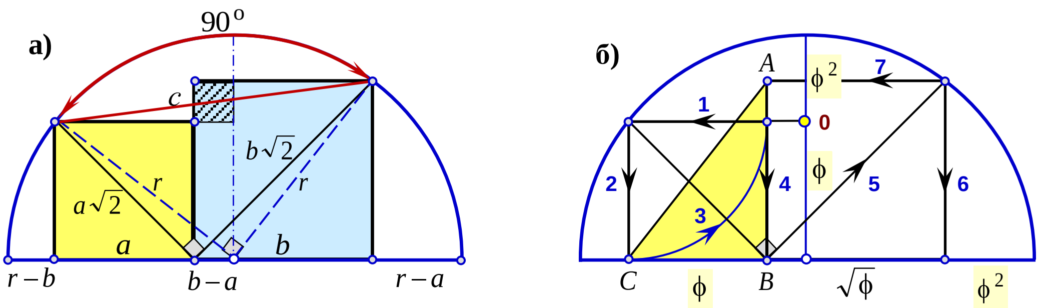

Рис. 1. Два квадрата в полукруге:
а) общие соотношения; б) золотая пропорция площадей квадратов

Диагонали квадратов наклонены под 45° и образуют между собой прямой угол 90°:

$$c^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Два радиуса, проведенные в концы отрезка c, также образуют прямой угол 90°:

$$c^2 = r^2 + r^2 = 2r^2.$$

Приравнивая c^2, получаем:

$$a^2 + b^2 = r^2,$$

то есть сумма площадей двух квадратов постоянна и равна квадрату радиуса.

Больший квадрат отстоит от правого конца диаметра на высоту сегмента, определяемую через радиус и хорду: $r - \sqrt{r^2 - (2b)^2/4} = r - \sqrt{r^2 - b^2} = r - a$.

Аналогично меньший квадрат отстоит от левого конца диаметра на величину $r - b$.

Если два квадрата одинаковы ($a = b$), то $2b^2 = r^2 \ \rightarrow\ b = r/\sqrt{2}$.

Максимальная длина стороны большего квадрата определяется из условия

$$r^2 = b^2 + (b/2)^2 = b^2 \cdot 5/4 \quad \rightarrow \quad b_{\max} = r \cdot 2/\sqrt{5}.$$

Тогда минимальная длина стороны меньшего квадрата равна

$$a_{\min} = b_{\max}/2 = r \cdot 1/\sqrt{5} = \frac{r}{\phi + \Phi}, \qquad \Phi = \phi^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Без потери общности $r = 1$, тогда стороны квадратов могут изменяться в пределах:

$$1/\sqrt{2} \le b \le 2/\sqrt{5}, \qquad 0{,}707 \le b \le 0{,}894;$$
$$1/\sqrt{5} \le a \le 1/\sqrt{2}, \qquad 0{,}447 \le a \le 0{,}707.$$

Если площади квадратов соотносятся в золотой пропорции, то

$$a = \phi,\ b = \sqrt{\phi}, \qquad a^2 + b^2 = \phi^2 + \phi = 1, \qquad b^2/a^2 = \Phi.$$

Построение. Вертикально расположенный радиус делится любым способом золотым сечением (ЗС) в точке 0 и далее последовательное движение по стрелкам 1÷7.

Треугольник ABC – Δ-Кеплера, прямоугольный с пропорциональными сторонами $(\phi,\ \sqrt{\phi},\ 1)$, сторона $AC = r = 1$.

Два подвижных квадрата: вращение и сдвиг.

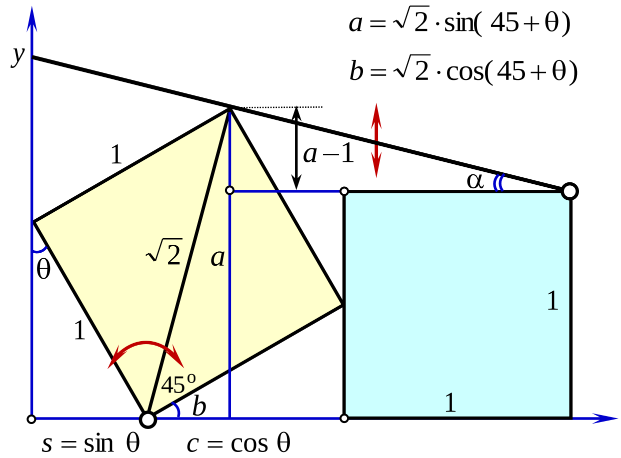

Рис. 2. Желтый квадрат поворачивается вокруг вершины, поднимая-опуская планку

Имеем два квадрата 1×1.

Один из них поворачивается так, что две вершины скользят вдоль координатных осей, а третья – отодвигает или тянет за собой второй квадрат [3].

Расположенный вверху однородный стержень (планка) может вращаться вокруг оси, совмещенной с одним из концов (рис. 2).

По мере поворота первого квадрата на угол $0 \le \theta \le \pi/2$ стержень сначала поднимается, затем опускается. Найти его наибольшую высоту подъема $y_{\max}$.

То есть достигает наивысшая точка, и в какую бы сторону дальше ни крутили, планка станет опускаться.

Перед нами классическая задача на экстремум с вполне четким алгоритмом решения, путем определения функции и приравнивания нулю её производной.

Обозначим отрезки $a, b, c = \cos\theta,\ s = \sin\theta$.

Используя тригонометрические формулы синуса и косинуса суммы углов, а также равенство $\sin 45 = \cos 45 = 1/\sqrt{2}$, вычислим тангенс текущего угла наклона стержня двумя способами:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a-1}{c+1} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin(45+\theta)-1}{\cos\theta+1-\sqrt{2}\cdot\cos(45+\theta)} = \frac{c+s-1}{c+1-c+s} = \frac{s+c-1}{1+s};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-1}{s+c+1}.$$

Объединяя эти соотношения, получаем

$$y = 1+\frac{(s+c+1)(s+c-1)}{1+s} = 1+\frac{2s\cdot c}{1+s} = 1+\frac{\sin 2\theta}{1+\sin\theta}.$$

Приравниваем нулю производную $y' = \dfrac{2\cdot\cos 2\theta\cdot(1+\sin\theta)-\sin 2\theta\cdot\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2} = 0$;

$$2\left(1-2s^2\right)\cdot(1+s)-2s\cdot c^2 = 0;$$

$$s^3+2s^2-1 = \left(s^2+s-1\right)(s+1) = 0.$$

Для угла $0 \le \theta \le \pi/2$ синус $s = \sin\theta > 0$, поэтому он находится из квадратного уравнения и равен малой константе золотого сечения ϕ:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi,\quad \theta \approx 38{,}17^{\circ}.$$

Максимальный подъем левого конца стержня:

$$y_{\max} = 1+\frac{2\phi\cdot\sqrt{1-\phi^2}}{1+\phi} = 1+\frac{2\phi\cdot\sqrt{\phi}}{\phi^{-1}} = 1+2\phi^{5/2}.$$

Таким образом, в данной задаче константа золотого сечения определяет наибольшее (граничное) значение параметра.

Движение одного из двух квадратов.

Есть два единичных квадрата 1×1.

Линия L соединяет их несовпадающие вершины (рис. 3).

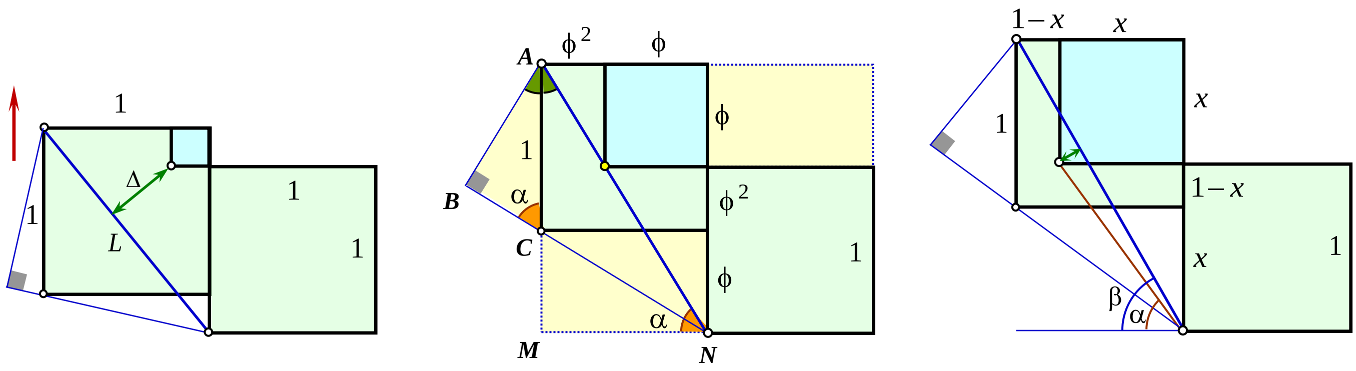

Рис. 3. Структурное проявление золотого сечения на основе двух единичных квадратов

Левый квадрат поднимается. На стыке появляется третий квадрат размером $x \times x$.

Расстояние Δ изменяется и по мере развития ситуации обнуляется, линия L проходит через вершину третьего квадрата.

Данное положение соответствует равенству углов $\alpha = \beta$ и воспроизводится сдвигом исходного квадрата на величину золотой константы:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{x}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1+x}{1}; \qquad \alpha = \beta \quad \to \quad x^2 + x - 1 = 0, \quad x = \phi;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \Phi, \quad \alpha \approx 58{,}3^{\circ}.$$

Золотое сечение де-факто имеет место.

Деление пополам также присутствует, но неявно, – через два квадрата или две адекватные половинки прямоугольника размером 2×1.

Кроме того, вовне присутствуют два золотых прямоугольника $\phi \times 1$.

Затрудняемся точно указать, но где-то уже встречали описание данной задачи, причем с вклиниванием в неё прямоугольного треугольника (см. рис. 3).

Как видим, для решения он вовсе не обязателен, ибо не несет особой смысловой нагрузки. В то же время становится полезным дополнением для золотоносного случая.

Выделим подобные прямоугольные треугольники $\Delta ABC \sim \Delta AMN$: у них равные острые углы α, которые имеют перпендикулярные стороны и одновременно являются дополнениями до прямых углов. Из пропорций сторон треугольников следует, что катеты $\Delta\, ABC$ равны $\frac{1}{\sqrt{2-\phi}}$, $\frac{\phi}{\sqrt{2-\phi}}$, а их отношение – константе золотого сечения.

Углы упомянутых треугольников при вершине A равны между собой, следовательно, AC – биссектриса $\angle BAN$. То есть дихотомическое деление на равные части присутствует не только через два одинаковых квадрата, но и разбивку угла пополам.

В целом во всех рассмотренных случаях смежных квадратов показано особенное проявление золотого сечения, приводящее к экстремальным значениям тех или иных параметров. – Окей.

To be continued...

Литература:

1. Василенко С.Л. О бедном квадрате замолвите слово... // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15675, 28.11.2009. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161586.htm.

2. Василенко С.Л. Этот безумный 21 век, как бифуркация в человеческой судьбе // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22176, 10.06.2016. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162974.htm.

3. Geometry puzzles 14. As fun tends to INFINITY. – youtube.com/watch?v=POciW0wU68E.

Украина, Харьков