С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 4. Гармония в сочетании квадратов с другими фигурами

Две половины целого всегда равны между собой. Не бывает большей или меньшей половины. Я уже полгода вам это твержу. Но бóльшая половина класса до сих пор этого не понимает. – Учительница математики.

Эта странная половина.

Из всех разговорных словосочетаний русского языка одно из самых странных – это «бóльшая половина». Употребляется практически повсеместно.

Хотя слово *половина* имеет точное значение: «одна из двух равных частей».

Но могут быть и отклонения от общего правила [1].

Например, проявление кумулятивного эффекта в организованных системах: «Целое, которое больше суммы своих частей» (по А.Богданову) [2]. То есть две равные половины целого при суммировании могут превышать само целое.

Видимо, «бóльшая половина класса» думала именно об этом, ещё с детства философствуя, сидя на горшке.

Четные числа составляют как бы половину натурального ряда. На самом деле их столько же, сколько и всех натуральных чисел, ибо каждому числу ряда можно сопоставить свое четное число. Мощности множеств четных и натуральных чисел равны.

Хорошо известен также парадокс Банаха–Тарского или парадокс удвоения шара. Теорема в теории множеств утверждает, что трехмерный шар равно-составлен двум своим копиям. То есть «обычную сферу можно "разрезать" на несколько частей, из которых потом можно сложить две точно такие же сферы» [3]. – Делим целое пополам, складываем и вместо одного получаем два.

Есть и другие вариации, типа: «Сколько времени? – Половина десятого». Понятно, что это не пять (5 = 10:2). Но может быть 9.30 и/или 21.30 в зависимости от времени суток. Причем произносим *десятого*, устремляя взор в будущее. Англичане всегда говорят «половина после», то есть «half past nine (9)».

К слову, второй вариант более реалистичный. – Идет фиксация того, что уже свершилось, стало явью. В первом случае, после полдесятого время *десять* теоретически может и не наступить. В силу разных причин...

Закрытый интервал-половинка [0, ½] не равен такому же, но полуоткрытому интервалу (0, ½]. Оба интервала содержат бесконечное количество точек, чисел. Казалась бы, одна точка, тем более ноль (ничто, пустота), ни на что не влияет, словно одна молекула сока на одной из половинок яблока. Оказывается, влияет.

Остается восхищаться, как в древние века люди жили, не зная нуля. Спасибо изобретательным индийским математикам, которые определили ноль не в виде понятия отсутствия числа, а как само число. Это стало настоящим прорывом в мировосприятии.

Думаю, «бóльшая половина читателей» с этим согласится.

Гармония в сочетании элементов системы.

Слово *гармония* в переводе с древнегреческого языка означает связь. Гармоничное сочетание частей в целом обычно выражается через числовые отношения – пропорции. Вовсе не обязательно золотые, как утверждают безапелляционные адепты золотого сечения – ауроманы (*Au* – золото).

Деление пополам либо на три части – тоже гармония, поскольку определена связь.

Любой физический закон – гармония, ибо установлены отношения между параметрами.

Визуальная красота вторична. Хотя удачное расположение элементов или красивая форма модели доставляют эстетическое удовольствие, способствуют легкому восприятию и запоминанию.

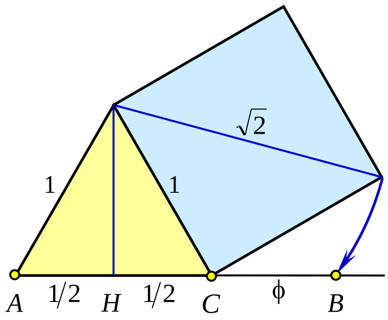
К этой области относятся наши последующие исследования, раскрывающие гармоничные связи-отношения квадратов с другими геометрическими фигурами.

Всю гамму взаимосвязей воспроизвести нереально, поскольку данный процесс находится в перманентном развитии. Поэтому остановимся на наиболее характерных примерах, высвечивая ключевую роль половинного деления в золотом сечении.

Ряд задач приведен на прекрасном веб-сайте cut-thek-not.org [4] пионера математического образования через Интернет Александра Богомольного (Ун-т Айовы), преждевременно ушедшего из жизни (2018).

Правильный треугольник и квадрат.

Построение включает переход от правильного треугольника с единичной стороной к квадрату, и далее поворотом его диагонали $\sqrt{2}$ к золотому сечению отрезка AB [5, 6].



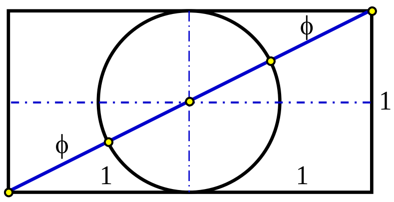
По теореме Пифагора $HB = a = \sqrt{2 - \frac{3}{2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

$$AB = a + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi, \quad CB = a - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi.$$

Таким образом, C – точка золотого сечения:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \Phi.$$

Круг и два квадрата.

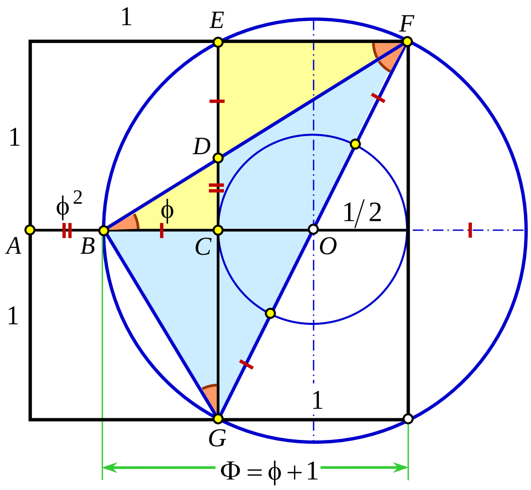


В простой гармоничной картинке John Arion [4] два квадрата 1×1 "сцеплены" кругом.

Наименьшее (наибольшее) расстояние от вершины составного прямоугольника 1×2 до окружности в $\Phi = 1 + \phi$ раз меньше (больше) диаметра окружности:

$$\sqrt{1^2 + (1/2)^2} - 1/2 = (\sqrt{5} - 1)/2 = \phi.$$

Квадрат 2×2.



Через две вершины квадрата 2×2 и середины двух его сторон проведена окружность с центром в точке O радиусом $r = \sqrt{1^2 + 2^2}/2 = \sqrt{5}/2$.

$BC = r - 1/2 = \phi$;

$AB = 1 - BC = \phi^2$.

Углы $\angle OBF = \angle OFB$ – в равнобедренном Δ;

$\angle OBF = \angle EFB$ – внутренние накрест лежащие;

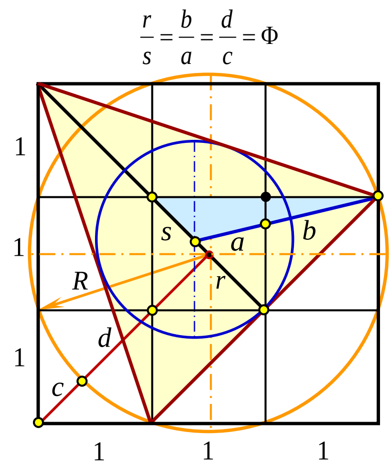
$\angle EFB = \angle OGF$ – взаимно $\perp$ углы.

Голубой и желтые треугольники подобны.

Их катеты являются сторонами золотых прямоугольников.

Ширина кольца между окружностями радиусом r и $1/2$ равна малой константе золотого сечения ϕ.

Квадрат 3×3.



В квадрат, составленный из 9 меньших квадратиков 1×1, вписан равнобедренный треугольник, и через вершины средних квадратиков проведена окружность (радиус R).

Найдем три характерных золотых отношения.

1. Равнобедренный треугольник: боковая сторона – $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$; основание и высота – $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$; полупериметр $p=\sqrt{2}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)$; площадь – $S=4$; радиус вписанной окружности (синий цвет) $r=S/p=\dfrac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{5}}$.

Отрезок $s=\sqrt{2}-b$, отношение $\dfrac{r}{s}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$.

2. Синий треугольник: по теореме Менелая о длинах отрезков $\dfrac{s+r}{r}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{1}{1}=1$, то есть

$$\frac{b}{a}=\frac{s+r}{r}=\frac{s}{r}+1=\Phi.$$

3. Радиус окружности $R=\sqrt{(1/2)^2+(3/2)^2}=\sqrt{5/2}$;

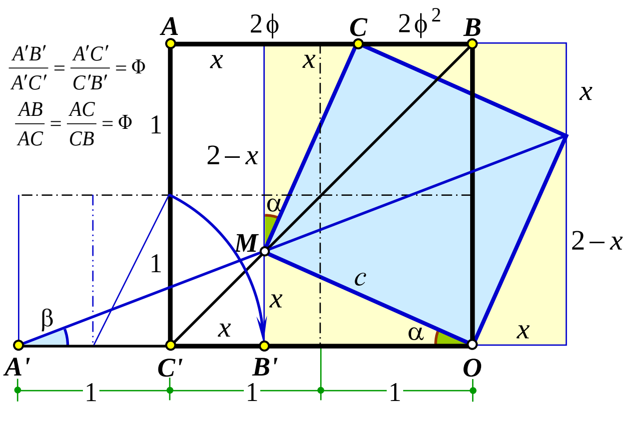
$$d=R-1/\sqrt{2}=\left(\sqrt{5}-1\right)/\sqrt{2};$$

$$c=3/\sqrt{2}-R=\left(3-\sqrt{5}\right)/\sqrt{2};$$

$$\frac{d}{c}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi.$$

Два квадрата.

В исходном квадрате 2×2 вокруг вершины O вращается сжимаемый квадрат так, что его вершины M и C скользят соответственно по диагонали и стороне исходного квадрата.



Доказать, если $A'C'=C'O/2$, то вершина C делит сторону AB золотым сечением.

Например, Leo Giugiuc [7] дает трудоемкое доказательство с использованием комплексных чисел.

Кроме того, из описания не понятен ход построения. Не подбором же искать точку M на диагонали?

Предлагаем, на наш взгляд, наиболее экономичное решение.

Сдвинем вправо исходный квадрат на расстояние x до точки M.

Желтые прямоугольные треугольники равны, так как имеют равные гипотенузы, а их острые углы образованы взаимно перпендикулярными сторонами.

Величина x элементарно (в одну строчку) находится из двойного равенства для угла β наклона диагонали малого квадрата

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{1+x} = \frac{2-x}{3+x} \quad \to \quad x^2 + x - 1 = 0, \quad x = \phi .$$

Отсюда следует составная золотая пропорция:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{A'C'}{C'B'} = \Phi .$$

Предложенный подход также позволяет найти другие параметры:

- площадь малого квадрата $c^2 = \phi^2 + (2-\phi)^2 = 6\phi^2$;
- отношение площадей квадратов $3/2 \cdot \phi^2 \approx 0{,}573$;
- отношение сторон $\sqrt{3/2} \cdot \phi \approx 0{,}757$;
- угол "подъема" квадрата $\alpha = \arcsin(1/\sqrt{6}) \approx 24{,}09^{\circ}$;
- угол наклона его диагонали $\beta = 45^{\circ} - \alpha = \operatorname{arctg}\phi^2 \approx 20{,}91^{\circ}$.

Наконец, дополнительная золотая пропорция дает алгоритм построения:

– делим сторону исходного квадрата пополам и циркулем откладываем точку A';

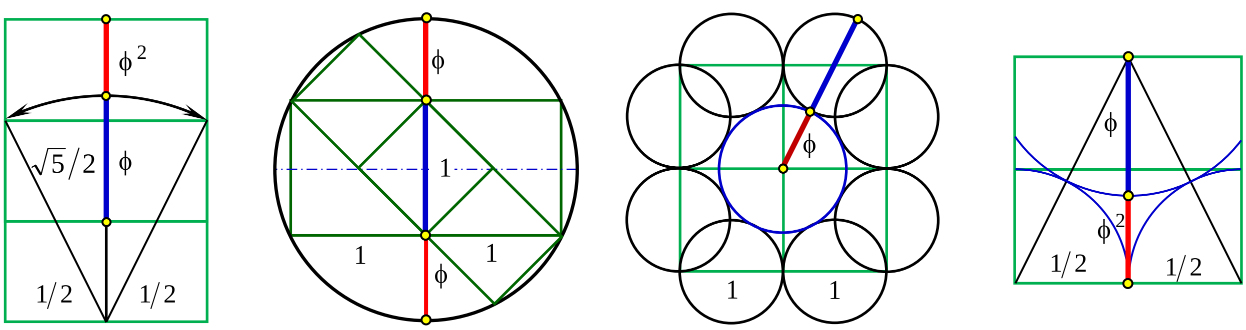
– любым способом находим крайнюю точку B' золотого сечения;

– восстанавливаем из неё перпендикуляр $B'M$ до пересечения с диагональю квадрата; сторона MO меньшего квадрата готова, дальше – "дело техники".

Структурность золотого отношения позволяет восстановить систему по минимуму исходных данных.

Пропорциональная привязка параметров к золотой константе дает возможность установить взаимосвязь между элементами.

Квадраты в окружности.

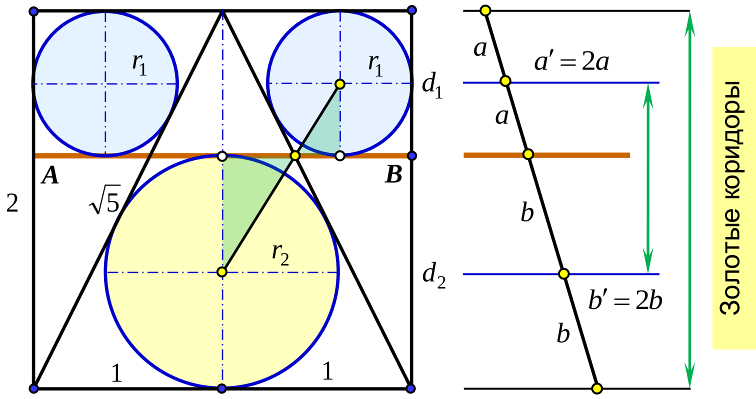


На каждом рисунке отношение синего отрезка к красному равно константе золотого сечения $\Phi = \dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\phi}{\phi^2}$, что обусловлено построениями на основе отрезков длиной 1 и $1/2$.

Симпатичная фигура с девятью окружностями взята из Американского конкурса математиков (2014), задача 10B [8]. – Радиус средней окружности в Ф раз меньше диаметра полуокружности.

Три круга в квадрате.

В квадрат 2×2 вписан равнобедренный треугольник, делящий квадрат на три треугольника, в которые вписаны окружности. Показать, что $r_2/r_1 = \Phi$.



По сути, это частный золотоносный случай более общей задачи, рассмотренной нами в работе [9] для различных углов наклона двух отрезков и трех вписанных окружностей.

	Треугольник	Площадь, S	Полупериметр, p	Радиус вписанной окружности, $r = S/p$
1	Прямоугольный	$S_1 = 1$	$p_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$r_1 = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \phi^2$
2	Равнобедренный	$S_2 = 2$	$p_2 = 1+\sqrt{5}$	$r_2 = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \phi$

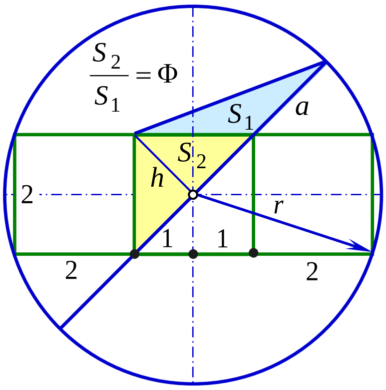
Отношение радиусов $\frac{r_2}{r_1} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Сумма радиусов $r_1 + r_2 = 1$, сумма диаметров $d_1 + d_2 = 2$ равна стороне квадрата. Это означает, что линия AB касается трех окружностей и параллельна основанию квадрата. Значит, любая секущая, проходящая через противоположные стороны квадрата, попадает в два золотых интервала-коридора, в которых выполняется составная золотая пропорция:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} = \frac{a'+b'}{b'} = \frac{b'}{a'} = \Phi.$$

Действительно, неординарный результат.

Три квадрата и окружность.



Задача № 1.

Три одинаковых квадрата размещены в ряд внутри круга.

Через противоположные углы среднего квадрата проведен диаметр круга.

Полученные внутренние треугольники в Ф раз больше по площади, чем внешние треугольники – Tran Quang Hung [4].

Без потери общности примем размеры квадратов 2×2.

Тогда радиус окружности $r = \sqrt{10}$;

высоты треугольников $h = \sqrt{2}$;

основание $a = \sqrt{10} - \sqrt{2}$.

Площади: $S_2 = 2$, $S_1 = a \cdot h/2 = \sqrt{2}\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)/2$;

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi = \Phi^{-1}.$$

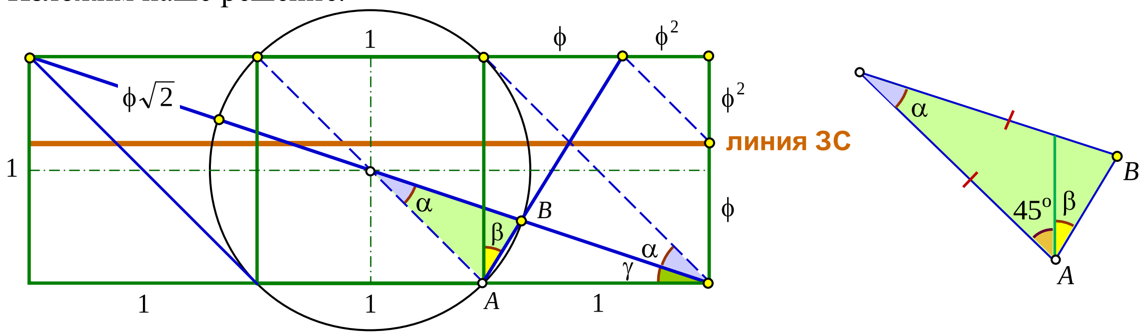
Задача № 2.

Прямоугольник состоит из трех квадратов размером 1×1. Вокруг среднего квадрата описана окружность. Линия *AB* проходит через точки пересечения окружности с вершиной квадрата и диагональю прямоугольника. Показать, что она делит верхнюю сторону правого квадрата золотым сечением (ЗС).

Для единичной стороны квадрата это означает, что $\operatorname{tg}\beta = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 = \phi$.

Замысел задачи изложен в заметке [10]. Выкладки автора Spt Ân трудоемкие и неполно высвечивают общую золотоносную концепцию.

Изложим наше решение.



1) Обозначим углы (α, β, γ) и определим их взаимосвязи:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}, \quad \alpha + \gamma = 45^\circ; \quad \alpha + 2 \cdot \left(45^\circ + \beta\right) = 180^\circ \;\rightarrow\; \beta = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{45^\circ + \gamma}{2} = \frac{\theta}{2}.$$

По формулам для тангенса суммы углов и тангенса половинного угла находим:

$$\theta = 45^\circ + \gamma = 45^\circ + \operatorname{arctg} 1/3, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{1 + 1/3}{1 - 1/3} = 2;$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \Phi^{-1}, \quad \operatorname{tg}\beta = \phi;$$

$$(\gamma \quad \alpha \quad \beta) \approx (18{,}4 \quad 26{,}6 \quad 31{,}7)^\circ.$$

2) Диагональ составного прямоугольника $D = \sqrt{10}$, диаметр круга $d = \sqrt{2}$, диагональные отрезки вне круга $a = \dfrac{D-d}{2} = \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} = \phi\sqrt{2}$, отношение $\dfrac{a}{d} = \phi$.

3) Переносим золотое сечение на боковую сторону квадрата и проводим линию ЗС.

Она делит в золотой пропорции любой прямолинейный отрезок, соединяющий основания прямоугольника.

На наш взгляд, отличный результат в пользу золотой модели. – Окей.

To be continued...

Литература:

1. Василенко С.Л. Главная тайна золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17178, 04.01.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322109.htm.

2. Богданов А.А. Тектология: Всеобщая организационная наука. В 2-х кн. Кн. 1. – М.: Экономика, 1989. – 305 с.

3. Ященко И.В. Парадоксы теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002. Вып. 20. – 40 с.

4. Cut the knot. Golden Ratio in Geometry. – cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml.

5. Василенко С.Л. Современная геометрия золотой пропорции // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 07.02.2013. – artmatlab.ru/articles.php?id=97&sm=2.

6. Bataille M. Another Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum, **11** (2011), 55. – cut-the-knot.org/do_you_know/MBatailleGoldenRatio.shtml.

7. Golden ratio in two squares / Cut the knot. Golden ratio in geometry. – cut-the-knot.org/do_you_know/Buratino4.shtml.

8. Problem 22, 2014 American Mathematics Competition 10B Problems, https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2014_AMC_10B_Problems/Problem_22.

9. Василенко С.Л. "Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть 4 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28092, 01.10.2022. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165111.htm.

10. Golden ratio in two squares. Or, perhaps in three / Cut the knot. Golden ratio in geometry. – cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatioIn2SquaresOr3.shtml.

Украина, Харьков