С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 1. Общие закономерности и классическая задача о трех кругах

Налево пойдешь – треугольник Египта найдешь,
направо свернешь – в треугольник Кеплера попадешь,
прямо рискнешь – много золота возьмешь, но навсегда
с ним останешься в плену золотого сечения...

Вместо вступления.

Золотую пропорцию по праву можно назвать царицей отношений [1].

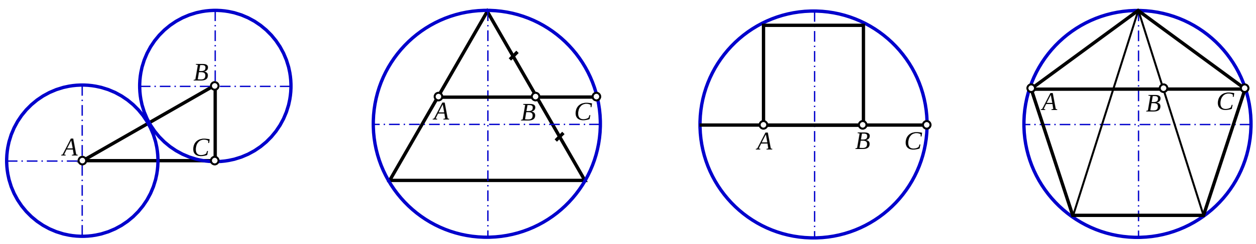
Её геометрическое проявление весьма отчетливо обнаруживается в пентаграмме, золотом прямоугольнике, треугольнике Кеплера и др. С другой стороны, здесь просматривается четкая связь с таким важным феноменом, как деление целого пополам, который находит применение в философии, математике, биологии, физике и др.

Например, совместное рассмотрение равномерного растяжения объекта в разные стороны приводит к модели удвоения целого согласно золотой пропорции, как прототипу роста и последующего деления биологической клетки пополам [2]. Золотое сечение (ЗС) как движитель создает напряженность, которая разрешается делением пополам.

Можно сказать, деление пополам – генетический код золотого сечения [3]. В свою очередь ЗС – первостепенный закон управления активными жизненными процессами. Идеальная формула для создания и поддержания активного живого существования.

Общие закономерности.

В литературе можно найти геометрические построения золотой пропрции с использованием правильных n-угольников ($n = 3, 4, 5$; рис. 1). В частности, золотая пропорция равностороннего треугольника рассмотрена в работе [4].

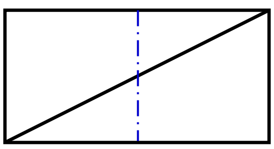


$$\frac{AB+BC}{AB} = 1+\frac{BC}{AB} = \Phi = 1+\phi$$

Рис. 1. Золотая пропорция в геометрических фигурах:
две одинаковые окружности и правильные многоугольники

Практически все геометрические построения золотого сечения связаны с метрическим соотношением $1:2$ отрезков и последующим переходом на форму $1^2+2^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$, которая позволяет воспроизвести корень из пяти в разных вариациях по теореме Пифагора.

Дальше дело техники и авторских фантазий.



Например, в прямоугольнике 1×2, составленном из двух квадратов 1×1, изначально заложены признаки золотой пропорции.

В частности, отношение суммы диагонали $\sqrt{5}$ и меньшей стороны 1 к большей стороне этого прямоугольника 2 дает золотую константу Φ.

На диагонали также можно выделить отрезок длиной $\Phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ Ф.

Для этого нужно перевести циркулем единичную сторону на диагональ (рис. 2), затем найти среднее арифметическое x двух чисел (отрезков) 1 и $\sqrt{5} = \sqrt{1^2+2^2}$ – гипотенузы прямоугольного треугольника. Для этого достаточно разделить отрезок BC пополам.

Поскольку $x - AB = AC - x$, то $x = \dfrac{AB+AC}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

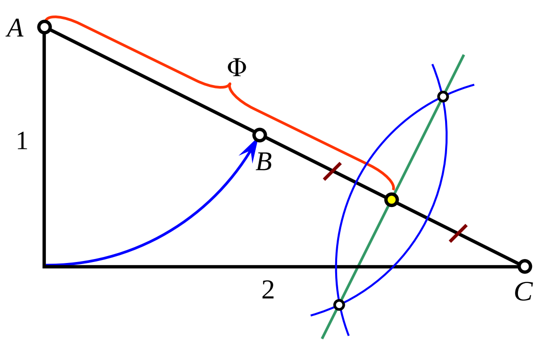


Рис. 2. построение константы Φ, как среднего арифметического двух чисел – длин отрезков длиной 1 и $\sqrt{5}$

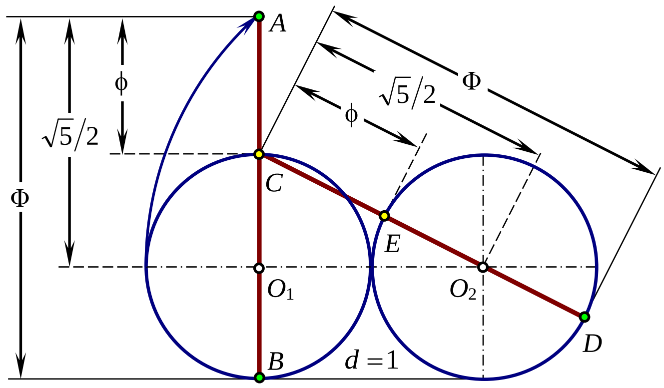


Рис. 3. Новая вариация в геометрии ЗС на основе числового тождества $5 = 1^2 + 2^2 = 3^2 - 2^2$

Главную отличительную роль в константах $(\Phi, \phi) = \left(\sqrt{5} \pm 1\right)/2$ играет число пять и/или квадратный корень из пяти.

Пять – небольшое целое число. Для его отображения через пару квадратов натуральных чисел имеется двойное тождество:

$$5 = 1^2 + 2^2 = 3^2 - 2^2.$$

Или ближе к записи констант золотого сечения: $\left(\sqrt{5}/2\right)^2 = (1/2)^2 + 1^2 = (3/2)^2 - 1^2$.

Данные числовые значения можно воспроизвести геометрически с использованием прямоугольных треугольников. Отсюда формируются разные способы построения золотого сечения, включая один из вариантов их расположения на одном рисунке (рис. 3) [5].

Чертим две одинаковые касающиеся окружности единичного диаметра $d = 1$, центры которых находятся на горизонтальной оси. Из центра O_2 радиусом 3/2 проводим дугу до пересечения с вертикальной осью (в точке A), проходящей через центр O_1. Соединяем точки C и O_2, продолжая линию до точки D. Собственно и всё построение.

Золотое сечение и деление пополам.

В работе [6] рассмотрены основные варианты-комбинации (а их пять) составления математической пропорции из тройки величин (1, a, b) – целого 1 и его двух составных элементов $a + b = 1$.

Доказано, что из данной тройки (1, a, b) деления целого на две аддитивные части можно составить только две разрешимые пропорции, которые приводят к делению пополам $1:a = 1:b$ и золотому сечению (ЗС) $1:a = a:b$ – пропорциональному ассиметричному разбиению. Других вариантов попросту нет. Не считая случаев, когда одна из частей стремится к нулю.

Наравне с очевидным делением пополам согласно пропорции $1:a = 1:b$, модель ЗС совершенно естественна и элементарна в своем образовании. Почему и была предметом изучения ещё античных ученых...

Получается, что золотое сечение – безальтернативное пропорциональное отношение тройки попарно неравных величин (1, *a*, *b*).

Ничего, кроме золотой пропорции в этом случае составить не удается.

Для неодинаковых частей $a \neq b$ она единственна.

Вместе с тем, как показано в статье [7], деление пополам – предельное отношение с учетом точек внешнего деления.

Таким образом, единственной пропорцией в рамках подмножества (1, *a*, *b*), которая допускает внешнее деление, является золотая пропорция. Кроме того, для золотого сечения точка внешнего деления расположена сравнительно недалеко от краев единичного отрезка. Причем так, что полный размах равен кубу отношения.

"Золотая модель" – наипростейшая в классе триадных структур. Прежде всего, с точки зрения использования единичных коэффициентов.

Уже отсюда можно говорить о делении в крайнем и среднем отношении, которое восходит к геометрической пропорции, основанной на геометрической прогрессии.

Деление пополам – на самом деле не менее простое сечение, чем золотое. В некоторой степени даже сказать, более усложненное, когда отношение частей равно 1, а отношение целого к каждой части составляет 2.

В золотом сечении эти отношения уравновешиваются простым и одновременно удивительным образом.

Деление пополам связано с закономерностями симметрии, золотое сечение – с признаками асимметрии. Членение на неравные части отвечает принципу разнообразия и вызывает ощущение подвижности и динамики.

"Золотое" решение классической задачи о трех кругах.

Три окружности радиусами $r_2 \geq r_1 > x$ касаются друг друга внешним образом и имеют общую внешнюю касательную – для удобства демонстрации-изложения горизонтальную линию (рис. 4).

По двум известным радиусам $r_2 \geq r_1$ определим меньший радиус x.

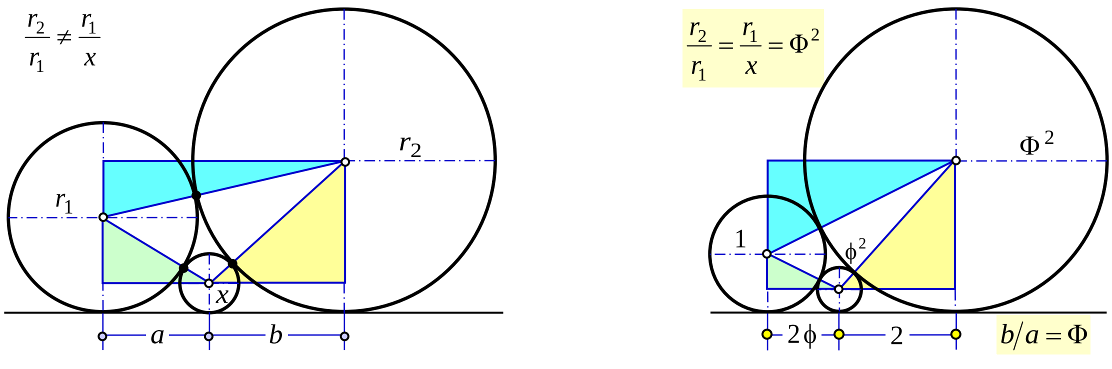


Рис. 4. Три взаимно-касающиеся окружности: геометрическая пропорция радиусов приводит к квадрату константы золотого сечения

Теорема Пифагора для трех прямоугольных треугольников (рис. 5):

- зеленый Δ: $a^2 = (r_1 + x)^2 - (r_1 - x)^2 = 4r_1x$;
- желтый Δ: $b^2 = (r_2 + x)^2 - (r_2 - x)^2 = 4r_2x$;
- голубой Δ: $(a+b)^2 = (r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2 = 4r_1r_2$.

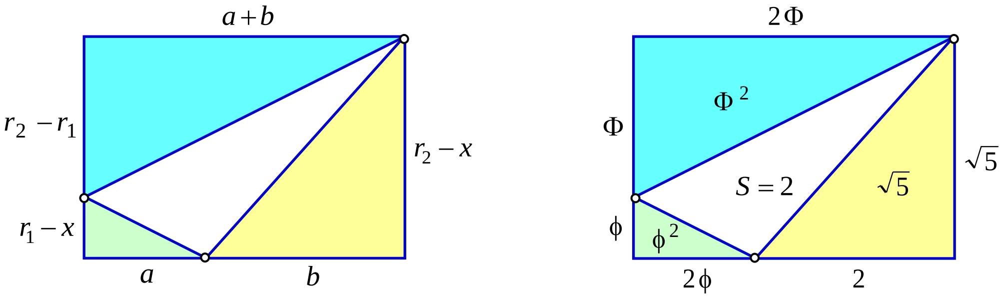


Рис. 5. Характерные расстояния и площади фигур,
образованных между центрами трех взаимно-касающихся окружностей

После подстановки и преобразований получаем:

$$x = \frac{r_1\, r_2}{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

Найдем отношения радиусов, которые удовлетворяют геометрической пропорции:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1}{x} \quad \to \quad x = \frac{r_1^2}{r_2} = \frac{r_1\, r_2}{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2};$$

$$\delta = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_2}} = \frac{1+\delta}{\delta}; \qquad \delta^2 - \delta - 1 = 0, \qquad \delta = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1}{x} = \Phi^2.$$

Площади кругов соотносятся как Φ^4, что просматривается визуально (см. рис. 4-б).
Итак, решение геометрической пропорции приводит к золотому сечению (ЗС):
- радиусы соотносятся как квадрат константы ЗС;
- расстояние b между проекциями центров большей и меньшей окружности равно диаметру средней окружности $b = 2\sqrt{r_2 x} = 2\sqrt{r_1^2} = D_1$.
- отношение отрезков между проекциями центров равно константе ЗС: $b/a = \Phi$.

Родственная задача, но уже с числом Пизо.

В работе [8] рассмотрена задача, когда окружность радиусом x вписана между тремя фиксированными полукругами, диаметры которых расположены на одной линии (рис. 6-а).

Радиус x определяется с применением теоремы косинусов для двух треугольников по общему углу β (рис. 6-б):

$$x = r\frac{r_1 r_2}{r^2 - r_1 r_2} = \frac{r_1 + r_2}{1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}}; \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2}.$$

Если центр наибольшего полукруга принять за нулевую точку отсчета, то координаты центра окружности радиусом x равны:

$$\{\dot{x}, \dot{y}\} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\} \cdot (r - x), \qquad \cos\alpha = \frac{(r-x)^2 + r_2^2 - (r_1 + x)^2}{2\,(r-x)\,r_2}.$$

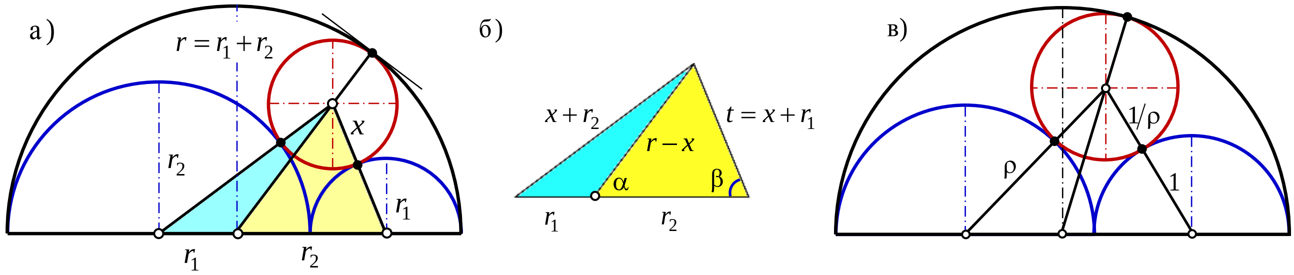


Рис. 6. Окружность радиусом x вписана между тремя фиксированными полукругами, диаметры которых расположены на одной линии

Геометрическая пропорция радиусов окружностей $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{r_1}{x} = \rho$ приводит к кубическому уравнению $\rho^3 - \rho - 1 = 0$ с вещественным корнем $\rho = \sqrt[3]{0{,}5 + s} + \sqrt[3]{0{,}5 - s} \approx 1{,}3247$, $s = \sqrt{69}/18$, ρ – пластическая константа или минимальное число Пизо – единственное положительное число, удовлетворяющее тождеству $(\rho - 1)\cdot\rho\cdot(\rho + 1) = 1$.

Напомним, целое алгебраическое число $v > 1$ называется числом Пизо [9, с. 162], если все его сопряженные, отличные от самого v, лежат внутри круга $|z| < 1$, то есть по абсолютной величине строго меньше единицы. В частности, если v – целое рациональное, то у него нет никаких сопряженных чисел, и потому оно есть число Пизо.

Числа Пизо обладают одним удивительным свойством: их степени "почти целые" [10]. Поэтому они являются подходящими кандидатами в качестве иррациональных оснований для позиционных систем счисления. Включая константу золотого сечения в системе счисления Бергмана [11].

Наименьшее целое число, большее 1, равно 2. Оно занимает выделенное положение с точки зрения чисел Пизо, как первая точка, около которой находится бесконечно много точек накопления чисел Пизо!

Множество чисел Пизо замкнуто и потому содержит наименьший элемент ρ.

С ним связана целочисленная последовательность Падована [12]:

$$P_{n+1} = P_{n-1} + P_{n-2},\ P_0 = P_1 = P_2 = 1,\ \lim_{n\to\infty} P_{n+1}/P_n = \rho .$$

Структурно модель во многом сходна с золотым сечением и числами Фибоначчи.

Например, словесно-временная аналогия:

числа Фибоначчи – «завтра = сегодня + вчера»;

числа Падована – «завтра = вчера + позавчера»,

или вложенные бесконечно повторяющиеся радикалы:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\cdots}}}}\ ; \qquad \rho = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{\cdots}}}}\ .$$

Сравните с известной формулой Рамануджана:

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}}}\ .$$

Положив для определенности (без потери общности) $r_2 = 1$, получаем (рис. 4-в)

$$(r \quad r_1 \quad r_2 \quad x) = (1 + q \quad q \quad 1 \quad q^{-1}).$$

Итак, геометрическая прогрессия параметров не обязательно приводит к золотой пропорции. Зато отношение численных значений параметров $\frac{r_1}{b} = \frac{1}{2}$ в первой задаче предопределяет золотую модель. – Окей.

To be continued...

Литература:

1. Василенко С.Л. От экстремальных свойств треугольника Кеплера и золотого конуса – к возможному проецированию на пирамиды Древнего Египта // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22827, 16.12.2016. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163163.htm.

2. Василенко С.Л. Золотое сечение в задачах сжатия-растяжения и деления целого пополам // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 28.08.2014. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14046.html / Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 05.10.2014. – artmatlab.ru/articles.php?id=122&sm=2.

3. Василенко С.Л. Естественные тела биосферы: симбиоз золотого сечения и деления пополам // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22192, 13.06.2016. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162975.htm.

4. G. Odom and J. van de Craats, Elementary Problem 3007, American Math. Monthly, 90 (1983) 482; solution, 93 (1986) 572.

5. Василенко С.Л. Целочисленные основания золотого сечения в геометрических образах и очевидность его конструкции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23935, 09.11.2017. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163486.htm.

6. Василенко С.Л. Пропорциональное деление целого // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.10.2013. – artmatlab.ru/articles.php?id=108&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 24.11.2013. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13179.html.

7. Василенко С.Л. Золотая пропорция как основообразующая структура трехмерной модели физического пространства // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.21998, 16.04.2016. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162931.htm.

8. Василенко С.Л. "Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть 3 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28055, 07.09.2022. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165096.htm.

9. Касселс Д.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Изд. ин. лит, 1961. – 213 с.

10. Егоров А. Числа Пизо // Квант. – 2005. – № 5, с. 8–13. – № 6, с. 9–13.

11. Bergman G.A. A number system with an irrational base. Mathematics Magazine, 1957, No. 31, 98-119.

12. Padovan sequence (or Padovan numbers) // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – https://oeis.org/A000931.