С.Л. Василенко

Целочисленные углы в равнобедренных треугольниках с экстремальными решениями на основе золотого сечения

Целочисленные решения содержат целые углы (в градусах) равнобедренного треугольника и углы, образованные чевианами. Наименьшее (экстремальное) значение угла при основании треугольника составляет 30° и приводит к константе золотого сечения.

Ум хорошо, а два лучше...

Вместо вступления.

Старая пословица учит, что вместе люди способны решать многие проблемы лучше и эффективнее, чем по отдельности.

Оптимальные решения вырабатываются путем совместного обсуждения.

Бывают ситуации, когда человек самостоятельно просто не может прийти к верному решению. С поддержкой всегда чувствуешь себя более уверено.

Это особенно актуально в наше нелегкое время в отношениях России и Украины.

Главное не потерять, а теперь уже, наверно, просто найти точку опоры, без которой трудно устоять на ногах.

Чтобы осмотреться вокруг, нужно на что-то опереться и приподняться.

Без мифов и штампов, искусственных скреп и геополитических фантазий.

Со временем точка может стать кирпичиком фундамента.

Главное, не потерять лицо и не разрушить бесповоротно человеческие отношения.

В этом контексте Санкт-Петербург и Харьков всегда отличались характерной ментальностью и мировоззренческими настроениями, как культурные и научно-технологические центры.

Я искренне благодарен Андрею Ковалеву (Санкт-Петербург) за его внимание и верные замечания к моей недавней статье на страницах АТ (письмо с согласия автора прилагается). – Мудрому слову тройная цена.

Оставаясь людьми, мы сохраняем свою, пусть небольшую, но всё-таки общую точку опоры, включая общность интересов-отношений к предустановленной гармонии, свойственной феномену золотой пропорции.

В одной из задач для фильтрации целых углов (в градусах) [2] я имел неосторожность применить функцию trunc(x), которая "обрезает" вещественное число до целого значения, отсекая дробную часть. При этом в процессе машинного округления-представления близких чисел результаты могут кардинально отличаться, например, trunc(1,0000000001) = 1 и trunc(0,9999999999) = 0, что привело к частичной потере допустимых полезных решений.

После замены её на классическое округление round(x) всё стало на свои места.

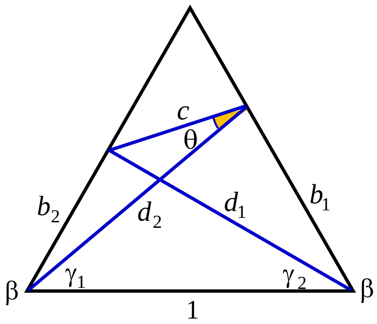
Задача заиграла новыми красками, приобрела стройность и неожиданно полезные решения.

Появился смысл восстановить общую картину заново, возвратившись к исходному состоянию – status quo.

Целочисленные углы.

Равнобедренный треугольник часто выделяется среди других треугольников как конечное решение некоторой геометрической задачи.

Можно и наоборот: проанализировать взаимосвязи параметров в априори заданном равнобедренном треугольнике.



ЗАДАЧА. В равнобедренном треугольнике с углом при основании β проводится произвольный отрезок-перемычка c между боковыми сторонами, в результате чего образуется выпуклый четырехугольник с боковыми сторонами b_1, b_2, а также диагоналями d_1, d_2 под углами наклона γ_1, γ_2.

По заданным углам β, γ_1, γ_2 требуется найти угол θ, в том числе целочисленные решения в градусах. Знание угла θ позволяет определить углы четырехугольника при стороне c:

$180 - \beta - \gamma_1 + \theta$;

$180 - \beta + \gamma_2 - \theta$.

Альтернативная формулировка: от вершин углов β при основании равнобедренного треугольника проводятся под углами γ_1, γ_2, две чевианы, концы которых соединяются отрезком. Найти углы между этим отрезком и чевианами.

Без потери общности можно положить длину основания равной 1.

Учитывая равенство $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, по теореме синусов находим стороны и диагонали четырехугольника:

$$b_1 = \frac{\sin\ \gamma_1}{\sin\ (\beta+\gamma_1)}, \quad b_2 = \frac{\sin\ \gamma_2}{\sin\ (\beta+\gamma_2)};$$

$$d_1 = \frac{\sin\ \beta}{\sin\ (\beta+\gamma_2)}, \quad d_2 = \frac{\sin\ \beta}{\sin\ (\beta+\gamma_1)}.$$

По теореме косинусов определяется угол:

$$\theta = \arccos\left(\frac{c^2 + d_2^2 - b_2^2}{2\cdot c\cdot d_2}\right);$$

$$c^2 = b_1^2 + d_1^2 - 2\cdot b_1\cdot d_1\cdot\cos(\beta - \gamma_2).$$

Углы вычисляются машинным перебором целых значений (табл. 1) в интервалах:

$$0 < \gamma_2 < \gamma_1 < \beta < 90.$$

Некоторые расчетные значения угла θ могут достаточно близкими к целым, но всё же таковыми не являться, поэтому фильтрация-просеивание целых углов осуществляется с помощью проверочного условия $\left|\theta - \mathrm{round}(\theta)\right| < 10^{-10}$.

Всего определены 53 разноплановые решения с взаимоотношениями между углами, которые представлены в табл. 1.

Анализ результатов позволяет установить ряд закономерностей.

1. Особо выделяются первые две строки таблицы.

Сумма углов $\beta + \gamma_1 = 54^{\circ}$ – характерный угловой параметр, свойственный отношениям в золотой пропорции. В частности, половина внутреннего угла правильного выпуклого пятиугольника или угла между соседними вершинами пентаграммы.

Диагональ четырехугольника d_2 равна константе золотого сечения (!).

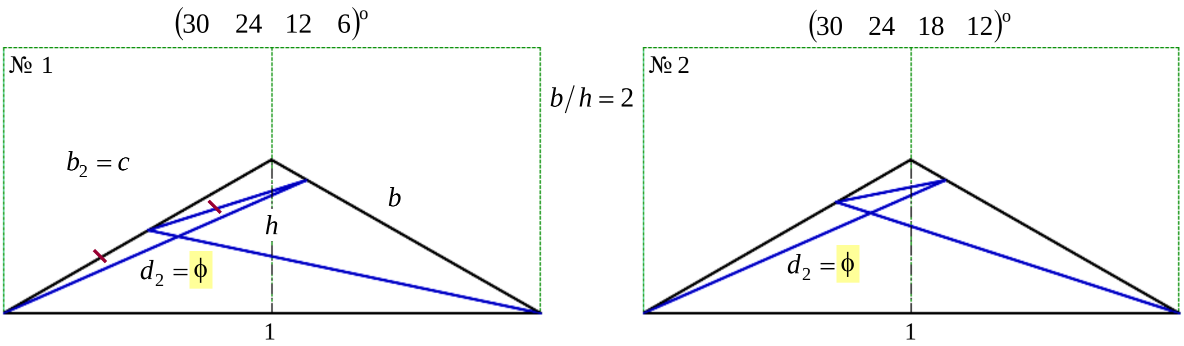
$$d_2 = \frac{\sin\ \beta}{\sin\ (\beta+\gamma_1)} = \frac{\sin\ 30}{\sin\ 54} = \frac{1/2}{\left(\sqrt{5}+1\right)/4} = \Phi^{-1} = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Таблица 1

Целочисленные углы в равнобедренном треугольнике

№ п/п	Углы, градус				Отрезки, $a = 1$				
	β	γ_1	γ_2	θ	b_1	b_2	d_1	d_2	c
1	**30**	**24**	12	6	0,503	0,311	0,747	**0,618**	0,311
2	**30**	**24**	18	12	0,503	0,416	0,673	**0,618**	0,209
3	54	39	21	12	0,630	0,371	0,838	0,810	0,462
4	54	39	27	18	0,630	0,460	0,819	0,810	0,385
5	54	42	24	12	0,673	0,416	0,827	0,813	0,416
6	**54**	42	30	18	0,673	0,503	**0,813**	**0,813**	0,338
7	**54**	48	24	6	0,760	0,416	**0,827**	**0,827**	0,416
8	54	48	42	24	0,760	0,673	0,813	0,827	0,173
9	54	51	39	9	0,805	0,630	0,810	0,838	0,211
10	54	51	42	12	0,805	0,673	0,813	0,838	0,169
11	62	59	31	3	1	0,516	0,884	1,030	0,516
12	62	59	56	28	1	0,939	1	1,030	0,105
13	64	58	32	6	1	0,533	0,904	1,060	0,533
14	64	58	52	26	1	0,877	1	1,060	0,209
15	66	57	33	9	1	0,551	0,925	1,089	0,551
16	66	57	48	24	1	0,813	1	1,089	0,313
17	68	56	34	12	1	0,572	0,948	1,118	0,572
18	68	56	44	22	1	0,749	1	1,118	0,416
19	70	55	35	15	1	0,594	0,973	1,147	0,594
20	70	55	40	20	1	0,684	1	1,147	0,518
21	**72**	**54**	36	18	1	**0,618**	1	1,176	**0,618**
22	74	53	32	16	1	0,551	1	1,204	0,717
23	74	53	37	21	1	0,645	1,030	1,204	0,645
24	76	52	28	14	1	0,484	1	1,231	0,813
25	76	52	38	24	1	0,674	1,062	1,231	0,674
26	78	51	24	12	1	0,416	1	1,259	0,908
27	78	51	39	27	1	0,706	1,098	1,259	0,706
28	80	50	20	10	**1**	0,347	**1**	1,286	**1**
29	80	50	40	30	1	0,742	1,137	1,286	0,742
30	80	60	30	10	1,347	**0,532**	**1,048**	**1,532**	**1,048**
31	80	60	50	30	1,347	1	1,286	1,532	0,684
32	80	65	25	5	1,580	0,438	1,020	1,717	1,299
33	80	65	60	40	1,580	1,347	1,532	1,717	0,542
34	80	70	50	10	1,879	1	1,286	1,970	1
35	80	70	60	20	1,879	1,347	1,532	1,970	0,684
36	82	49	16	8	1	0,278	1	1,312	1,089
37	82	49	41	33	1	0,782	1,181	1,312	0,782
38	84	42	18	12	0,827	0,316	**1,017**	1,229	**1,017**
39	84	42	30	24	0,827	0,547	1,089	1,229	0,900
40	84	48	12	6	1	0,209	1	1,338	1,176
41	84	48	42	36	1	0,827	1,229	1,338	0,827
42	84	57	33	15	1,333	0,611	1,116	1,580	1,072
43	84	57	42	24	1,333	0,827	1,229	1,580	0,923
44	84	66	42	12	1,827	0,827	**1,229**	1,989	**1,229**
45	84	66	54	24	1,827	1,209	1,486	1,989	0,919
46	84	69	21	3	2,056	0,371	1,030	2,191	1,835
47	84	69	66	48	2,056	1,827	1,989	2,191	0,636
48	84	72	42	6	2,338	0,827	1,229	2,445	1,645
49	84	72	66	30	2,338	1,827	1,989	2,445	0,760
50	86	47	8	4	1	0,140	1	1,364	1,259
51	86	47	43	39	1	0,878	1,284	1,364	0,878
52	88	46	4	2	1	0,070	1	1,389	1,338
53	88	46	44	42	1	0,935	1,345	1,389	0,935

Кроме того, во втором случае углы $(\beta, \gamma_1, \gamma_2, \theta) = (30, 24, 18, 12)^o$ составляют арифметическую прогрессию, а сумма углов $\gamma_1 + \gamma_2 + \theta = 54^o$.



Так или иначе, золотое сечение фиксирует-обозначает минимальную границу двух целочисленных углов β, γ_1, играя роль своеобразного буфера-ограничителя на значение углов снизу.

Можно сказать, имеем экстремальное (минимальное) состояние, когда углы $\beta = 30^o$, $\gamma_1 = 24^o$ одновременно принимают наименьшие значения.

При этом одна из диагоналей также принимает наименьшее значение $d_{2\,\min} = \phi$, равное константе золотого сечения, и вместе с единичным основанием равнобедренного треугольника образует золотую пропорцию.

Углы 30^o, 24^o – бесспорно, "знаковые" в геометрии. Но почему именно они являются минимально возможными в данной задаче, причем в связке с золотым сечением, пока остается для нас загадкой. Ведь должно же быть этому какое-то объяснение!

Конечно, важно установить сам факт.

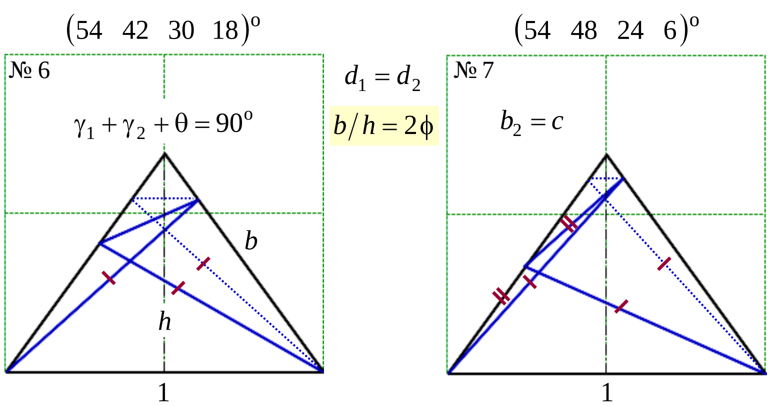
Но не менее значимо понять, почему именно так, а не иначе.

Возможно, как-то связано с тем, что в данном случае высота треугольника минимальна и равна $h = a/2 \cdot \mathrm{tg}\,\beta = 1/\sqrt{12} \approx 0{,}2887$. А число $\pi/\sqrt{12}$ – максимальная плотность упаковки равных кругов на евклидовой плоскости, которой соответствует их гексагональное расположение, когда каждый круг окружен шестью другими окружностями.

Кроме того, $1/\sqrt{12}$ – отношение радиуса вписанной окружности к длине стороны равностороннего треугольника.

Оставим это поле деятельности для пытливых умов, и двинемся дальше.

2. Строки № 6 и № 7 отличаются уникальным равенством разновысоких (!) диагоналей $d_1 = d_2$.



В первом случае наличествует также арифметическая прогрессия углов ($\Delta = 12$)

$$(\beta, \gamma_1, \gamma_2, \theta) = (54, 42, 30, 18)^{\circ}.$$

Кроме того, угол $\beta = 54^{\circ}$ и $\sin(54+42)^{\circ} = \sin(54+30)^{\circ}$, а также единственный пример суммы углов $\gamma_1 + \gamma_2 + \theta = 90$.

А во втором еще и $b_2 = c$, то есть появляется равнобедренный треугольник.

Золотое сечение здесь проявляется в отношении боковой стороны исходного треугольника к его высоте $b/h = 2\phi$.

Число 54 обладает и другими свойствами:

– наименьшее число, представимое в виде суммы трех квадратов тремя способами

$$54 = 1^2 + 2^2 + 7^2 = 2^2 + 5^2 + 5^2 = 3^2 + 3^2 + 6^2;$$

– в диапазоне от 1 до 2^8 имеется 54 простых чисел.

3. Строка № 28 выделяется равенством $\beta = \gamma_1 + \gamma_2 + \theta = 80^{\circ}$, что отразилось на равенстве отрезков $a = b_1 = d_1 = c$.

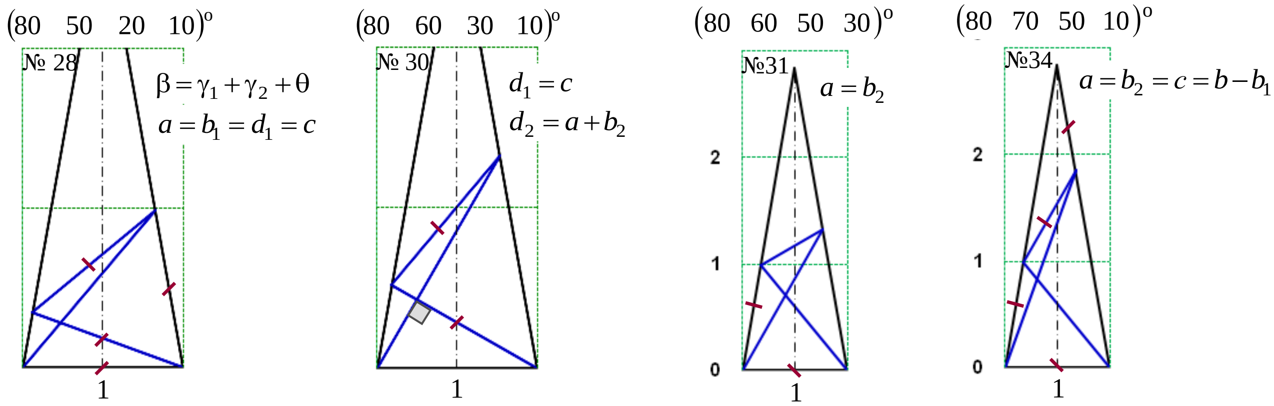
Это равенство лежит в основе геометрического определения угла θ через последовательное построение трех равнобедренных треугольников (youtube.com/watch?v=HQc-54hQ8kw&t=2s).

4. Строка № 30 вобрала одновременно несколько свойств: $\gamma_1 + \gamma_2 = \beta + \theta = 90^{\circ}$, $d_1 = c$ и единственный случай выполнения равенства $d_2 = a + b_2$. Диагонали пересекаются под прямым углом, образуя равнобедренный треугольник.

5. Строки № 31, № 34 отражают два случая, когда меньшая боковая сторона четырехугольника равна основанию равнобедренного треугольника $a = b_2$.

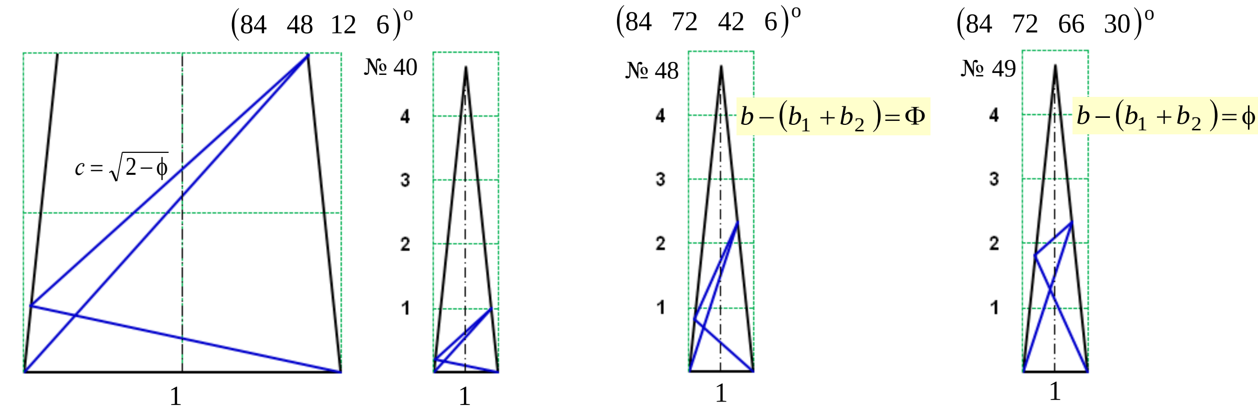
То есть, чевиана, проведенная из угла при основании равнобедренного треугольника, отсекает на его боковой стороне отрезок, равный основанию.

Более того, пример № 34 дополняется ещё и равной перемычкой, образуя единственную цепочку равных отрезков $a = b_2 = c = b - b_1$.

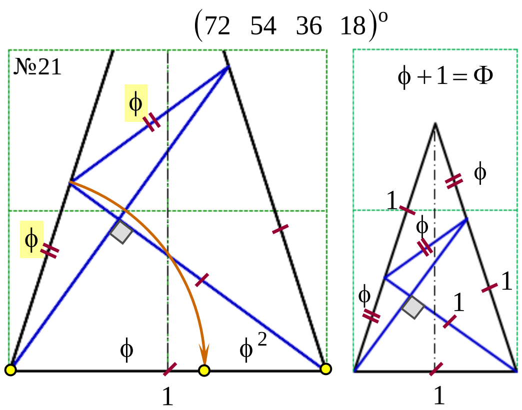


6. Больше всего целочисленных решений для угла $\beta = 84^{\circ}$ – 12 шт. Среди них проскальзывают связи с золотой константой. Так для строки № 40 величина $c^2 = 2 - \phi \approx 1{,}382$. Можно сказать, отголоски золотого сечения, связанные с удвоением углов: $\gamma_2 = 2\theta = 12^{\circ}$ и $2\gamma_1 = \beta + \gamma_2 = 96^{\circ}$ – через равенство синусов.

Отличаются и примеры № 48–49: разность между боковой стороной треугольника и суммой величин b_1+b_2 составляет соответственно Φ и ϕ.



7. Искомая задача имеет всего 53 целочисленных решений. Из них 52 образуют пары, в каждой из которых углы β, γ_1 и длины отрезков b_1, d_2 повторяются.



И только золотоносный вариант № 21 стоит особняком (!), не имея такой пары.

Собственно она ему и не нужна, ибо всё в нём предельно гармонично и слажено.

Это видно даже визуально. Расчеты лишь подтверждают.

Углы $(\beta, \gamma_1, \gamma_2, \theta)=(72, 54, 36, 18)$ образуют арифметическую прогрессию.

Исходный треугольник относится [2] к так называемым треугольникам Робинсона с углами $P(36, 72, 72)^{\circ}$, $Q(108, 36, 36)^{\circ}$ и длинами сторон соответственно $(\phi,\ 1,\ 1)$, $(1,\ \phi,\ \phi)$.

Н.Воробьев называет их треугольниками золотого сечения [3, с. 100].

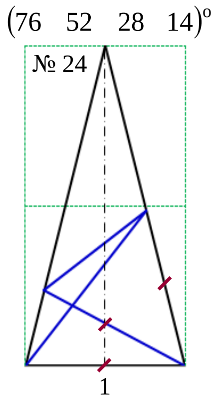
8. В равностороннем треугольнике $\left(\beta=60^{\circ}\right)$ целочисленных решений нет.

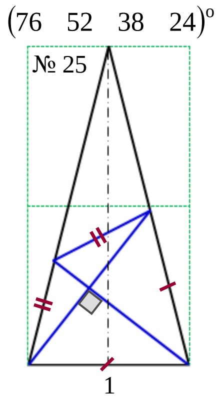
Зато для каждого четного угла $\beta>60^{\circ}$ имеются взаимодополняющие пары решений, дающих равнобедренные и прямоугольные треугольники. Углы θ легко находятся теоретически, $n=\overline{1,14}$:

Равнобедренные Δ	Равнобедренные и прямоугольные Δ $(\gamma_1+\gamma_2=90)$
$a=b_1=d_1$	$a=b_1,\ b_2=c,\ d_1\perp d_2$
$\beta=60+2n$	
$\gamma_1=90-\beta/2=60-n$	
$\gamma_2=180-2\beta=60-4n$ $\theta=90-\beta=30-2n$	$\gamma_2=30+n$ $\theta=3n$

Примечание: формулы для углов предложил А. Ковалев (Санкт-Петербург).

Например:





9. В целом можно объединить наиболее встречающиеся случаи:

$a = b_1$ с образованием равнобедренного треугольника – 27 ед., включая 14 ед. $a = b_1 = d_1$;

$\gamma_1 + \gamma_2 = 90^\circ$, то есть диагонали перпендикулярны $d_1 \perp d_2$ – 20 ед.;

$c = b_2$ с образованием равнобедренного треугольника – 18 ед.;

$\beta + \theta = 90^\circ$, когда угол θ дополняет угол при основании β до прямого – 17 ед.

Заключение.

Знание целочисленных углов (табл. 1) позволяет сформулировать задачи и оформить их красивыми геометрическими решениями, полезными в учебном процессе старшеклассников, включая дистанционное обучение.

Одно из решений, в частности, приведено на электронном ресурсе (youtube.com/watch?v=HQc-54hQ8kw&t=2s) для геометрического определения угла θ через последовательное построение трех равнобедренных треугольников.

На этом, пожалуй, всё. Мудра голова – короткий язык.

Sapientia est potentia…

Литература:

1. Даль В.И. Пословицы русского народа. – М.: Имп. О-во истории и древностей рос. при Моск. ун-те, 1862. – 1096 с.

2. Василенко С.Л. "Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть 3 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28055, 07.09.2022. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165096.htm.

3. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

Украина, Харьков

Приложение

Письмо от Ковалева А.Н. (Санкт-Петербург)
(приводится по любезному согласию автора)

К вашей статье в АТ (Часть 3)
От: Ковалев Андрей Николаевич
ser.levsha@yandex.ru 18 окт., 17:44

Здравствуйте, Сергей Леонидович.

Вы пропустили, *как минимум*, две серии, частные случаи которых есть в Таблице 1 части 3. Я их и обнаружил, анализируя ваши находки.

1) (№ 6, 9, 11, 15, 23, 30 – Табл. 1) $d_1 = b_1 = 1$.

$$\beta = 60^{\circ} + 2n; \quad \gamma_1 = 90 - \beta/2 = 60 - n; \quad \gamma_2 = 180 - 2\beta = 60 - 4n;$$
$$\theta = 90 - \beta = 30 - 2n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

В частности: $\beta = 72^{\circ}$, $\gamma_1 = 54$, $\gamma_2 = 36$, $\theta = 18$ и $\beta = 70$, $\gamma_1 = 55$, $\gamma_2 = 40$, $\theta = 20$.

2) (№ 7, 8, 10, 12, 13, 14, 20, 24 – Табл. 1) $b_1 = 1$, $c = b_2$.

$$\beta = 60^{\circ} + 2n; \quad \gamma_1 = 60 - n; \quad \gamma_2 = 30 + n\,(\gamma_1 + \gamma_2 = 90); \quad \theta = 3n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

В частности: $\beta = 72^{\circ}$, $\gamma_1 = 54$, $\gamma_2 = 36$, $\theta = 18$ – совпадает с ч.с. из 1 серии (т.е. в нём свойства складываются) и $\beta = 80^{\circ}$, $\gamma_1 = 50$, $\gamma_2 = 40$, $\theta = 30$.

P.S. Что касается бега по стадиону против часовой стрелки (как и блуждание по лесу кругами против часовой стрелки), то дело здесь, как мне кажется, в том, что у правшей правая нога – маховая и ударная – делает шаг большей амплитуды, чем левая, поэтому и легче правшам бегать против часовой. В случае конькобежца еще добавляется и держание левой руки за спиной, и махание правой (ведущей) на поворотах.

С очевидностью, это следует делать (легче) при движении по кругу против часовой стрелки. "Формула 1" и велотрек отчасти просто блюдут традицию, отчасти следуют общей уже выработанной спортивной наклонности двигаться по кругу против часовой стрелки. Это становится психологически легче.

Кстати, в вальсе и фокстроте кружение (если смотреть сверху) идет против часовой стрелки. Здесь опять сказывается ведущая роль правой ноги.

С уважением, Ковалев Андрей.