С.Л. Василенко

Последовательности кругов, вписанных в параболу, и золотая пропорция

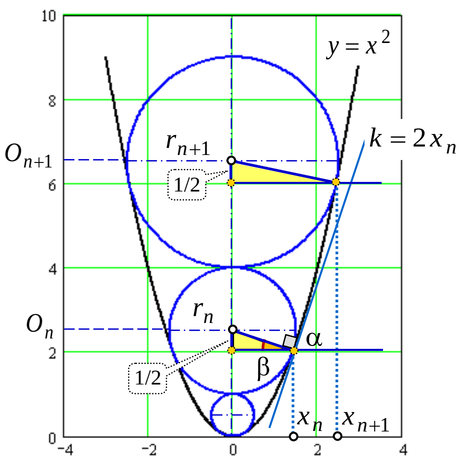
Слова истины просты (Еврипид)

В нескольких вариациях задача о вписанных в параболу окружностях разбросана в ряде электронных ресурсов. Иногда с ошибками, чаще без должного обоснования или, наоборот, с излишним усложнением.

Возможно, первоисточник восходит к японской науке [1] с присущей Востоку эстетикой открытий и построением лаконичных закономерностей, что отвечает общему посылу в математике: всё должно быть красиво, слажено и гармонично.

Даже формализованное описание хаоса или теории катастроф.

Поэтому свой выбор остановим на математической точности и простоте изложения.



Итак, в параболу $y = x^2$ вписана последовательность окружностей с центрами O_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, касающиеся друг друга внешним образом и ветвей параболы.

Самая нижняя окружность радиусом r_1 может касаться вершины параболы или "зависать" над ней.

Касание окружности O_n и параболы означает наличие у них общей касательной с координатой точки касания x_n.

Производная функции $y = x^2$ в этой точке равна $y' = 2x_n$, то есть наклон прямой $k = 2x_n = \operatorname{tg}\alpha$.

Радиус $r_n \perp k$. Тогда $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$.

Значит, независимо от величины радиуса r_n, точка касания всегда лежит ниже центра окружности ровно на величину $1/2$.

Из выделенных прямоугольных треугольников находим:

$$\begin{cases} r_n^2 = x_n^2 + 1/4, \\ r_{n+1}^2 = x_{n+1}^2 + 1/4, \end{cases} \quad \to \quad r_{n+1}^2 - r_n^2 = x_{n+1}^2 - x_n^2.$$

Но и расстояние между центрами окружностей равно разности квадратов координат:

$$O_{n+1} - O_n = r_{n+1} + r_n = x_{n+1}^2 - x_n^2.$$

Отсюда вытекают рекуррентные формулы для радиусов и центров окружностей:

$$r_{n+1}^2 - r_n^2 = (r_{n+1} + r_n)(r_{n+1} - r_n) = (r_{n+1} + r_n) \quad \to \quad r_{n+1} - r_n = 1;$$

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + 1, \\ O_{n+1} = O_n + 2r_n + 1. \end{cases}$$

Радиусы образуют арифметическую прогрессию.

Начальная окружность O_1 может касаться вершины параболы, когда точки касания с боковыми ветвями стягиваются в нулевую точку.

Поскольку в общем случае точка касания лежит ниже центра окружности на величину $1/2$, то радиус первой окружности при этом не превышает $1/2$, в противном случае окружность приподнимается над нулевой точкой.

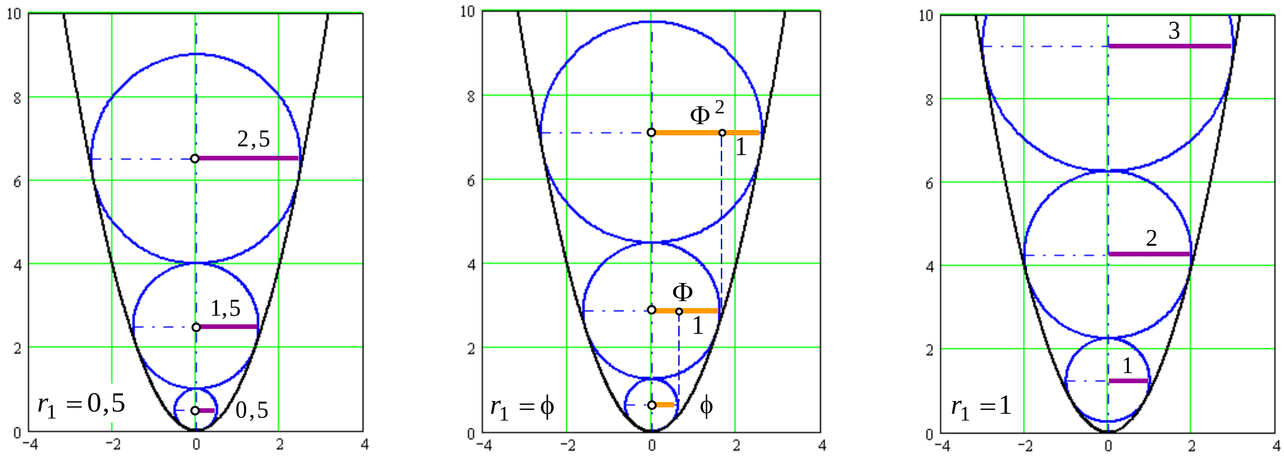
Таким образом, положение центра начальной окружности определяется формулой:

$$O_1 = \left\{ r_1,\ 0.25 < r_1 < 0.5;\ \ r_1^2 + 0.5^2,\ r_1 \ge 0.5 \right\}.$$

Произведя суммирование, переходим к явной аналитической форме, $r_1 \ge 0{,}5$:

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_1 + n, \\ O_{n+1} = (r_1 + n)^2 + 1/4. \end{cases}$$

Частные случаи представлены на рисунке.



Золотая константа $\Phi = \phi^{-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ удовлетворяет равенствам $\Phi = \phi + 1,\ \Phi^2 = \Phi + 1$, поэтому для трех начальных радиусов выполняется золотая пропорция

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{1} = \frac{1}{r_1} = \Phi.$$

Практически повсеместно задача рассматривается для частного удобного случая $r_1 = 1/2$, а уже готовый и заранее известный результат доказывается методом математической индукции. Формально правильно. Однако не покидает ощущение некоторой недосказанности и геометрической неясности. Конечно, индукция – мощное средство, но за преобразованиями формул при этом теряется созвучность самой геометрии.

Как видим, приведенные выкладки и конечные формулы просты, позволяют выполнять построения для произвольного начального радиуса $r_1 \ge 0{,}5$, включая константу золотого сечения $\phi = \Phi^{-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$.

При $r_1 = 1$ окружности имеют радиусы $r_n = n$ и центры $O_n = n^2 + 0{,}25$.

Для сравнения, радиусы подобной цепочки окружностей, вписанных в угол, образуют геометрическую прогрессию.

Задача может быть расширена на фрактальные образования с внедрением дополнительных касающихся окружностей между уже построенными окружностями и ветвями параболы. Один из таких подходов для радиуса $r_1 = 0{,}5$ описан в работе [2].

Далее обратимся к площадям, приняв без потери общности $r_1 = 1$.

Суммарная площадь n кругов равна

$$s_n = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \pi \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Верх n-го круга совпадает с уровнем $h_n = O_n + r_n = n^2 + n + 0{,}25$.

При этом парабола расположена по оси абсцисс в интервале $\left(-\sqrt{h_n}, \sqrt{h_n}\right)$, а площадь, заключенная между ветвями, равна площади прямоугольника минус интеграл от x^2:

$$S_n = 2h_n\sqrt{h_n} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{h_n}}^{\sqrt{h_n}} = \frac{4}{3}\left(n^2 + n + 0{,}25\right)^{3/2}.$$

Следовательно, круги внутри параболы занимают относительную площадь:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi/6 \cdot n(n+1)(2n+1)}{4/3 \cdot \left(n^2 + n + 0{,}25\right)^{3/2}} = \frac{\pi/2}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + \ldots}{n^3 + \ldots} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$$

Следует заметить, что число $\pi/4$ широко распространено в математике и, в частности, представляет [3]:

- отношение площадей круга и описанного квадрата;
- отношение площадей эллипса и описанного прямоугольника;
- отношение объемов цилиндра и описанного куба;
- площадь поверхности четверти сферы диаметром 1;
- наименьшее положительное решение уравнения $\sin x = \cos x$;

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n}{n} - \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{2x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx.$$

Теперь копилка числа $\pi/4$ пополняется относительной площадью последовательности кругов, вписанных в параболу $y = x^2$.

Литература:

1. Rothman T. Japanese Temple Geometry // Scientific American, 278, #5 1998, p. 85-91.

2. Зезюлькин П.А., Ващилин Е.В. Цепочки окружностей, вписанных в параболу // Матер. 56 науч. конф. аспирантов, магистрантов и студентов БГУИР. – Минск, 2020. – С. 113-115. – https://libeldoc.bsuir.by/bitstream/123456789/39987/1/Zezyulkin_Tsepochki.pdf.

3. Decimal expansion of Pi/4 // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – https://oeis.org/A003881.