

"Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть 2

Для треугольников, описанных вокруг полуокружности или окружности единичного радиуса, определены различные минимаксные оценки и параметры, приводящие к равнобедренному аналогу. В основе ряда экстремумов лежит константа золотого сечения.

В мире не происходит ничего, в чём бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.
Л. Эйлер

Среди минимаксных свойств равнобедренных треугольников с вписанной окружностью единичного радиуса особое место занимает проблематика, которую мы назвали «задачей о наибольшей перемычке». В ней гармонично переплетаются разные вопросы и решения, что позволяет выделить отдельным предметом изучения.

Формулировка и частное решение. В треугольник с фиксированным полупериметром p вписана окружность, радиус которой без потери общности принимается единичным $r = 1$.

Определение. Перемычка – отрезок между боковыми сторонами, который касается вписанной окружности и параллелен основанию $s \parallel a$ (рис. 4-а).

Найдем наибольшую длину перемычки [3, с. 274].

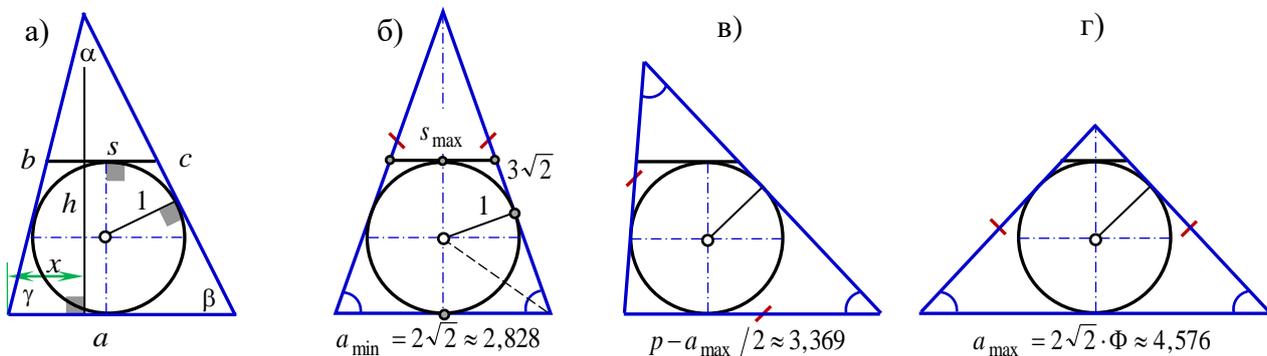


Рис. 4. Треугольники в задаче на максимальную длину перемычки s
б) – г): трансформация фигур для полупериметра $p = 4\sqrt{2}$

Отрезок-перемычка отсекает треугольник, подобный исходному, следовательно,

$$\frac{s}{a} = \frac{h-2r}{h} \Rightarrow s = a \cdot \left(1 - \frac{2r}{h}\right), \quad r=1 = \frac{S}{p} = \frac{ah}{2p} \Rightarrow s = a - a^2/p.$$

При неизменном полупериметре производная $s' = 1 - 2a/p = 0$, $a = p/2$, меняя знак с "+" на "-". То есть достигается наибольшее значение $s_{\max} = p/4$ при $a = p/2$, $h = 2p/a = 4$:

- высота треугольника равна четырем радиусам вписанной окружности;
- основание треугольника составляет четвертую часть его периметра $2p$.

В работе [3, с. 279] отмечается, что такой треугольник существует, и он равнобедренный с основанием $a = p/2$ и боковыми сторонами $b = c = 3p/4$.

Действительно, такой треугольник для $r = 1$ определен: (рис. 4-б):

$$h = p/\sqrt{2} = 4 \rightarrow p = S = 4\sqrt{2}, a = 2\sqrt{2}, b = c = 3\sqrt{2}.$$

Но к решению исходной задачи он имеет частный характер, исключительно для фиксированного полупериметра $p = S = 4\sqrt{2}$.

Например, если принять $p = 8$ и стороны треугольника $a = p/2 = 4$, $b = c = 3p/4 = 6$, то высота станет равной $h = \sqrt{b^2 - (a/2)^2} = 4\sqrt{2} \neq 4$, а площадь $S = ah/2 = 8\sqrt{2} \neq p$.

То есть в общем случае равнобедренный треугольник не отвечает заданным начальным условиям. Необходим более детальный анализ.

Общее решение. Для фиксированного полупериметра p и радиуса вписанной окружности $r = 1$, каждому значению основания a соответствует вполне определенный треугольник с боковыми сторонами, определяемыми из равенства:

$$b + c = \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h^2 + (a-x)^2} = 2p - a,$$

где x – проекция боковой стороны b на основание a или его продолжение (рис. 4-а).

После преобразований находим:

$$(b, c) = \frac{2p - a}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{pa^2 - a^3 - 4p}{p - a}}.$$

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

Величина $p - a > 0$, поэтому накладывается ограничение $pa^2 - a^3 - 4p \geq 0$.

Предельные значения основания находятся как положительные корни кубического уравнения $a^3 - pa^2 + 4p = 0$ (относительно a) по тригонометрической формуле Виета, соответственно меньший a_n и больший a_m :

$$a_n = \frac{p}{3} \cdot \left[2 \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) + 1 \right], \quad a_m = \frac{p}{3} \cdot (2 \cos \theta + 1), \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos \left(1 - \frac{54}{p^2} \right).$$

В процессе изменения боковые стороны достигают локальных экстремумов:

$$b_{\min} = a_n \quad \text{при} \quad a = c = p - a_n/2;$$

$$c_{\max} = a_m \quad \text{при} \quad a = b = p - a_m/2.$$

Углы могут быть тупыми, поэтому их лучше определять через теорему косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma.$$

Анализ. Трансформация сторон треугольника иллюстрируется диаграммой (рис. 5).

При заданном полупериметре p минимальное основание треугольника равно $a_{\min} = a_n$ при одинаковых боковых сторонах $b = c = p - a_n/2$.

В исходной задаче наибольшее значение перемычки определено $s_{\max} = p/4$ при $a = p/a$, $h = 2p/a = 4$, боковые стороны равны:

$$(b, c) = \frac{3p \mp \sqrt{p^2 - 32}}{4}, \quad p \geq 4\sqrt{2}.$$

Угол при основании γ прямой, если

$$b \perp a \rightarrow b = h = 4 \rightarrow \frac{3p - \sqrt{p^2 - 32}}{4} = 4 \rightarrow p = 6.$$

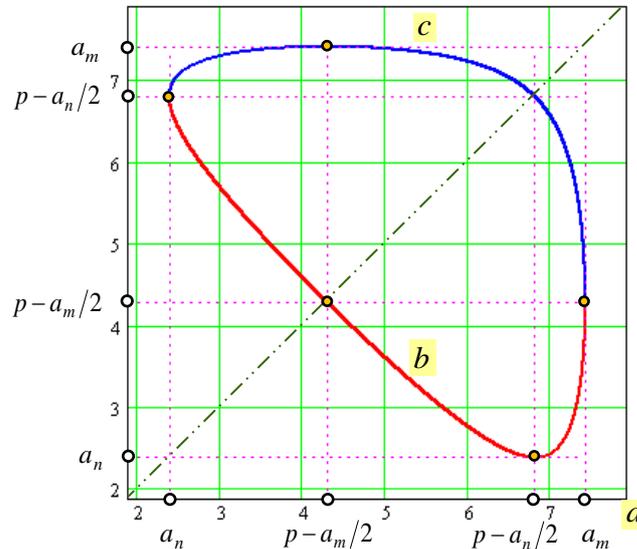


Рис. 5. Диаграмма изменения сторон треугольника (a , b , c) с полупериметром $p = 9$ и радиусом вписанной окружности $r = 1$

Перемишка может принимать сколь угодно большие значения, при этом $s_{\max} / p = 1/4$. Предельное значение основания стремится к диаметру вписанной окружности $a_{\min} \rightarrow 2$.

Важное уточнение. Наименьший полупериметр треугольника, описанного вокруг окружности единичного радиуса, имеет равносторонний треугольник с полупериметром $p = 3\sqrt{3}$ и стороной $a = 2\sqrt{3}$. При этом перемишка равна $s = 2/\sqrt{3}$, отношение $s/p = 2/9 \approx 0,2222\dots$ Почему так? – Наибольшую длину перемишки мы определяли через равенство нулю производной $s' = 1 - 2a/p = 0$. В небольшом, но принципиально важном диапазоне $5,196 \approx 3\sqrt{3} \leq p < 4\sqrt{2} \approx 5,657$ производная $s' \neq 0$, сторона $a > p/2$, а наибольшая длина перемишки определяется на границе $a = a_n$.

Последовательность треугольников. Итак, для фиксированного полупериметра p треугольника, описанного вокруг окружности единичного радиуса $r = 1$, перемишка достигает наибольшего значения $s_{\max} = a - a^2/p$, и по мере увеличения величины p наблюдается трансформация фигур (табл. 2):

$p_{\min} = 3\sqrt{3}$ – равносторонний треугольник;

$3\sqrt{3} < p < 4\sqrt{2}$ – равнобедренные треугольники с основанием $a = a_n > p/2$;

$p = 4\sqrt{2}$ – "золотоносный" равнобедренный треугольник (рис. 4-б); начиная с данного полупериметра основание $s_{\max} = p/4$ при $a = p/2$, $h = 2p/a = 4$;

$4\sqrt{2} < p < 6$ – равнобедренные остроугольные треугольники;

$p = 6$ – прямоугольный египетский треугольник ($\gamma = 90^\circ$) со сторонами (3, 4, 5);

$p > 6$ – тупоугольные треугольники ($\gamma > 90^\circ$), – при неограниченном росте полупериметра вырождаются в равнобедренный треугольник, который в свою очередь практически неотличим от прямой линии.

Таблица 2

Характерные параметры треугольников, имеющих наибольшую перемычку при фиксированном полупериметре

Полупериметр	Высота	Перемычка		Диапазон a		Стороны			Углы, град		
		s	s/p	a_n	a_m	a	b	c	α	β	γ
$3\sqrt{3}$	3	$2/\sqrt{3} \approx$	$2/9 \approx$	$2\sqrt{3} \approx$	$2\sqrt{3} \approx$	$2\sqrt{3} \approx$	$2\sqrt{3} \approx$	$2\sqrt{3} \approx$	60	60	60
5,196		1,155	0,222	3,464	3,464	3,464	3,464	3,464			
5,4	3,6	1,333	0,247	3	4,139	3	3,9	3,9	45,2	67,4	67,4
$4\sqrt{2}$	4	$\sqrt{2} \approx$	0,250	$2\sqrt{2} \approx$	$\Phi \cdot a_n \approx$	$2\sqrt{2} \approx$	$3\sqrt{2} \approx$	$3\sqrt{2} \approx$	38,9	70,5	70,5
5,657		1,414		2,828	4,576	2,828	4,243	4,243			
6	4	1,5	0,250	2,695	5,064	3	4	5	36,9	53,1	90
8	4	2	0,250	2,388	7,419	4	4,586	7,414	28,1	32,6	119,3
$p \rightarrow \infty$	4	$p/4$	0,250	2	p	$p/2$	$p/2$	p	0	0	180

Прежде всего, отметим довольно неожиданное проявление египетского треугольника.

С древних времен известна его уникальная особенность: он прямоуголен и является простейшим из Героновых треугольников, имеющих целочисленные стороны и площади. Радиус окружности, вписанной в египетский треугольник, равен единице.

Теперь можно добавить ещё одну отличительную характеристику: египетский треугольник – единственный из прямоугольных треугольников, который имеет наибольшую длину перемычки. Она соединяет больший катет и гипотенузу (рис. 6).

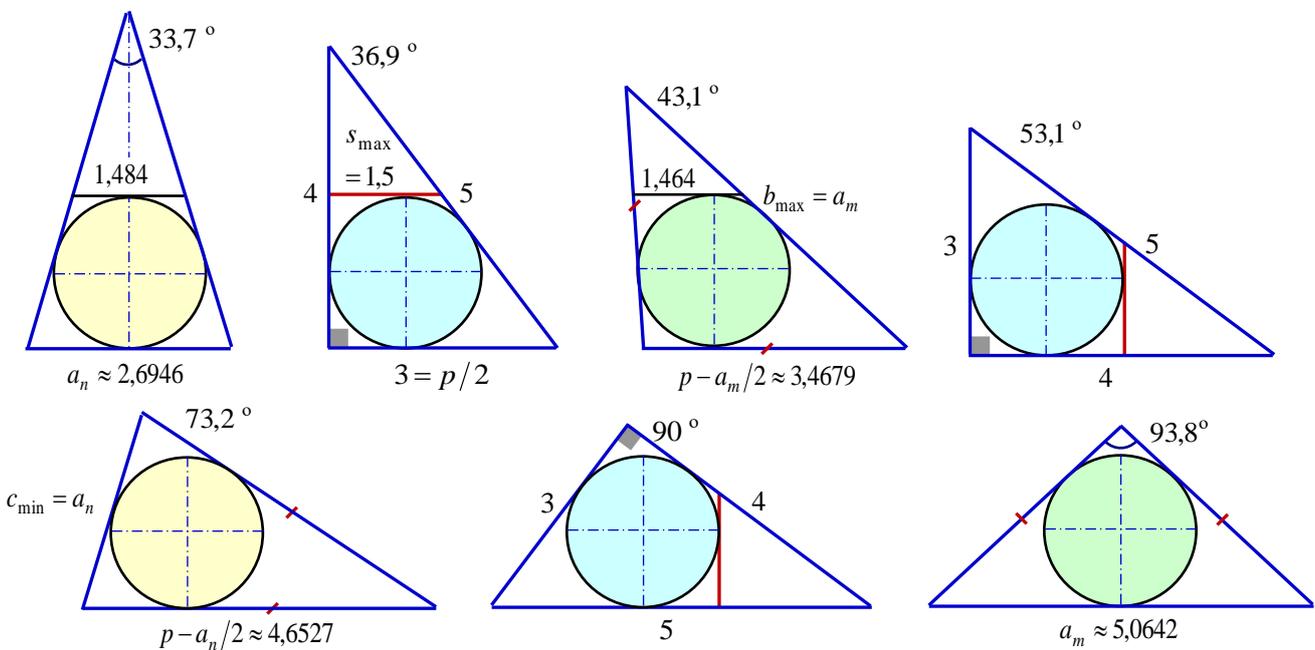


Рис. 6. Трансформация треугольника с постоянным полупериметром $p = 6$ и вписанной окружностью единичного радиуса $r = 1$: максимальную перемычку имеет египетский треугольник (одинаковым цветом выделены круги в равных треугольниках)

Для полупериметра $p = 6$ угол $\theta = 40^\circ$, величина $a_n = 2 + 4\sin 10^\circ \approx 2,695$, отношение параметров $\frac{a_m}{a_n} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{9} = i^{2/9} + i^{-2/9} \approx 1,879$ – имеет минимальный полином $x^3 - 3x - 1$.

Проявления равнобедренного треугольника. В задаче о перемычке равнобедренный треугольник, безусловно, выделяется, причем особым образом:

1) Для допустимого фиксированного полупериметра p по мере изменения длины основания в ограниченном интервале $a_n \div a_m$ множество фигур начинается и заканчивается равнобедренными треугольниками (рис. 7).

На рисунке выделен один периметр (перед египетским треугольником $p = 6$)

$$p = 3 + \sqrt{8} = (1 + \sqrt{2})^2 \approx 5,83; a_n = \frac{1 + \sqrt{4p - 3}}{2}, a_m = p - 1.$$

Числовое значение полупериметра имеет минимальный полином $x^2 - 6x + 1$.

Последовательность $z_n = 2z_{n-1} + z_{n-2}$ имеет аттрактор $z_{n+2}/z_n = 3 + \sqrt{8}$.

При таком полупериметре угол γ достигает 90 градусов в точке $(p - 0,5a_m)$.

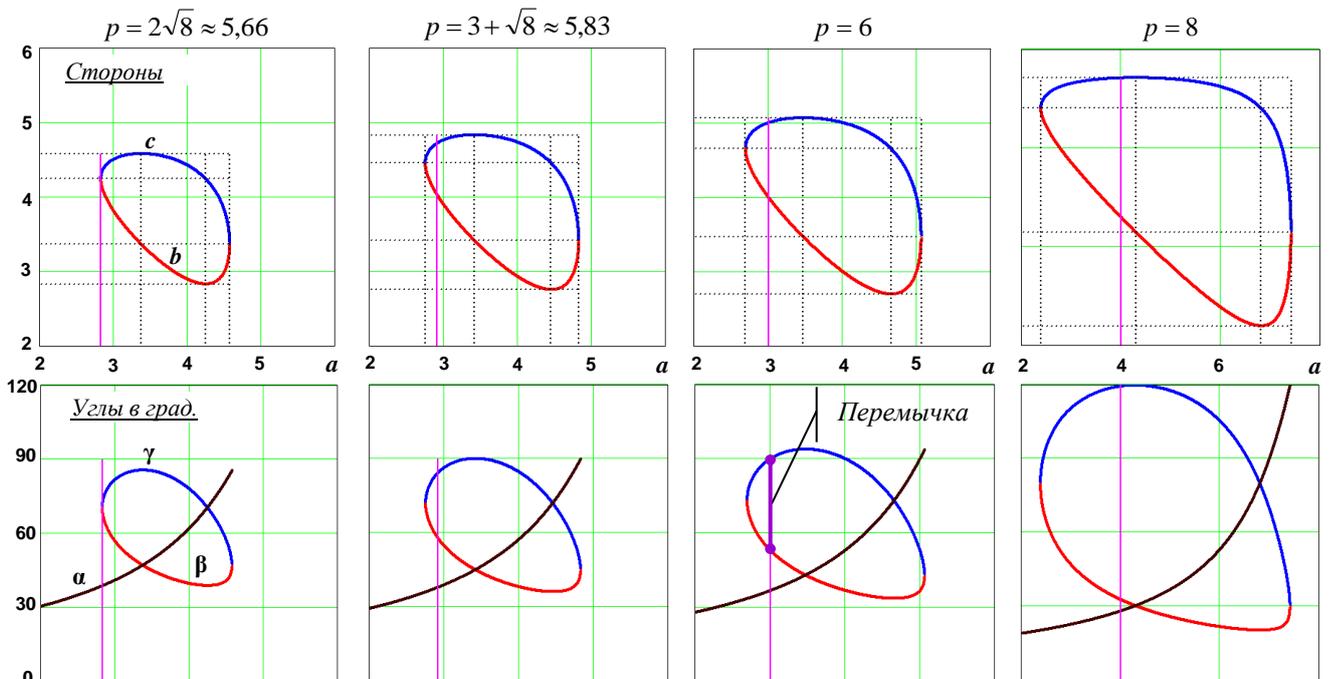


Рис. 7. Положение перемычки для характерных полупериметров p , изменение сторон и углов треугольника с вписанной окружностью единичного радиуса $r = 1$

2) Среди всех треугольников с вписанной окружностью единичного радиуса $r = 1$ и фиксированным периметром $\sqrt{3^3} \leq p \leq \sqrt{2^5}$ наибольшую перемычку s имеет равнобедренный треугольник с основанием $a = a_n$:

$$s_{\max} = a_n - a_n^2/p,$$

$$a_n = \frac{p}{3} \left[2 \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) + 1 \right], \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos \left(1 - \frac{54}{p^2} \right).$$

3) Полупериметр $p = 2\sqrt{8}$ является наибольшим, когда максимальная перемишка всё ещё у равнобедренного треугольника (рис. 4-6). Отношение основания к боковой стороне составляет $2/3$. Угол при основании треугольника $\beta = \arccos(1/3) \approx 70,53^\circ$. К слову, такому же значению равен двухгранный угол правильного тетраэдра, а также центральный угол куба, образованный центром и двумя соседними вершинами.

4) Предельная фигура в виде равнобедренного треугольника с наибольшей перемишкой имеет полупериметр $p = 4\sqrt{2} = \sqrt{2^5}$ с двойкой в пятой степени, что отразилось на связи с золотой пропорцией.

Кубический полином $x^3 - px^2 + 4p$ имеет три вещественных корня: отрицательный $x_1 < 0$ и два положительных, которые определяют интервал изменения основания,

$$x_1 = -\phi\sqrt{8}, \quad x_2 = a_n = \sqrt{8}, \quad x_3 = a_m = \Phi\sqrt{8};$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{8} \cdot (-\phi, 1, \Phi) \approx (-1.748, 2.828, 4.576).$$

Можно показать, что $\cos \theta = (3\sqrt{5} - 1)/8$, а корни полинома вместе с нулевой точкой образуют россыпь золотых отношений

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{-x_1} = \frac{x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_2} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Это предельная ситуация, когда среди всех треугольников с фиксированным периметром и вписанной окружностью единичного радиуса, наибольшую перемишку имеет равнобедренный треугольник. – *И эта ситуация ограничивается золотой пропорцией.*

Константа золотого сечения выступает как некий ограничитель-буфер, за пределами которого свойства системы изменяются существенным образом. Само золотое сечение основано на соотношении $1 : 0,5$ и уравнивает единицу и её половинку.

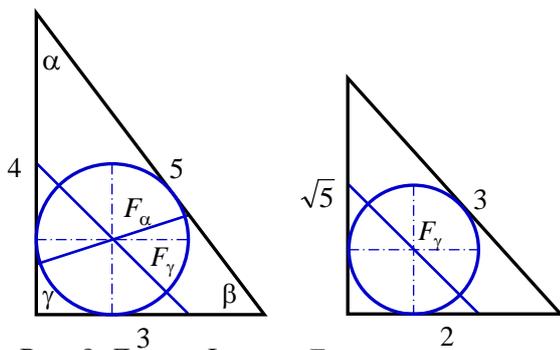


Рис. 8. Линии Филона F в прямоугольных треугольниках, связанные с корнями полинома $x^3 - px^2 + 4p$ для "предельного" равнобедренного треугольника

5) Но это не все свойства данных корней.

Помимо разностей $x_2 - x_1 = x_3$ и $x_3 - x_1 = \sqrt{40}$, корни связаны с такой важной геометрической фигурой как *линия Филона* – кратчайший отрезок между сторонами угла, проходящий через заданную точку внутри угла [7]. – В частности, через центр вписанной окружности прямоугольных треугольников (рис. 8):

$$F_\alpha = (x_3 - x_1)/3 = \sqrt{40}/3 \approx 2,108 \text{ и}$$

$$F_\gamma = x_2 = \sqrt{8} \approx 2,828 \text{ – линии Филона в египетском треугольнике (3, 4, 5);}$$

$$F_\gamma = x_3 - x_2 = -x_1 = \phi\sqrt{8} \approx 1,748 \text{ – линия Филона прямого угла в треугольнике (2, } \sqrt{5}, 3);$$

Отметим также, что величина $a_n = \sqrt{8}$ далеко не случайная.

Квадратный корень $\sqrt{8}$ широко распространен в математике и, например, означает:

- отношение периметра квадрата к его диаметру (длине диагонали);
- площадь треугольника с целыми длинами сторон (2, 3, 3);

- площадь между кривыми $\sin x$ и $\cos x$ для $\pi/4 < x < 5\pi/4$.
- диаметр сферы с площадью поверхности $8 \cdot \pi$;
- обратная величина радиуса срединной сферы, касающейся середины рёбер правильного тетраэдра с единичными ребрами;
- второе число Лагранжа (первое – $\sqrt{5}$) в последовательности чисел [8, с. 187-189], которые связаны с теоремой Гурвица и появляются в границах, обусловленных приближением иррациональных чисел рациональными.

"Парусник с золотым руно". В завершение рассмотрим подробнее график кубической функции $f(x) = x^3 - px^2 + 4p$ для полупериметра $p = 2\sqrt{8}$, которому соответствует равнобедренный треугольник с основанием $a = \sqrt{8}$.

Две точки локальных экстремумов, соответственно максимум и минимум функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 2px = 0, \quad x' = 0, \quad x'' = 2/3 \cdot p.$$

Равенство нулю второй производной определяет точку перегиба:

$$f''(x) = 6x - 2p = 0, \quad x_4 = 1/3 \cdot p.$$

Уравнение касательной $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

1) График кубической функции (кубической параболы) пересекает ось x в трех точках x_1, x_2, x_3 (рис. 9), которые вместе с нулевой точкой образуют золотые сечения.

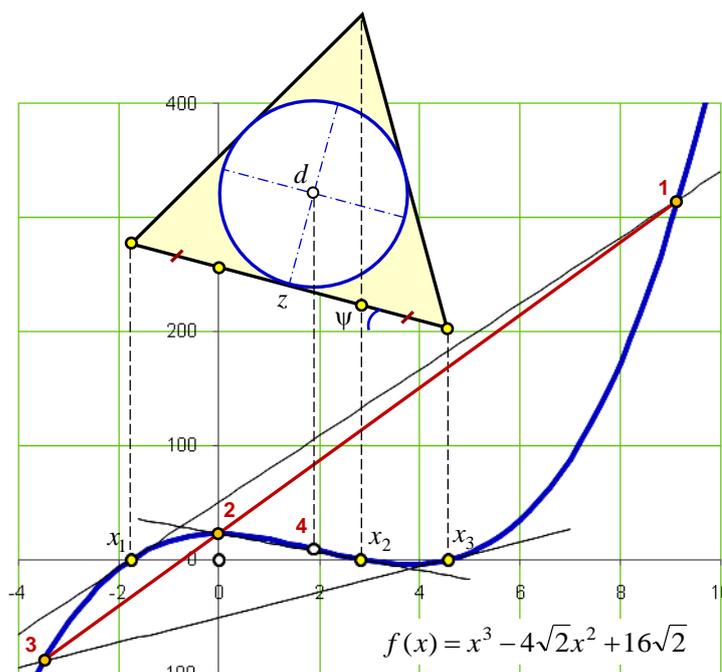


Рис. 9. "Парусник с золотым руно":

кубическая параболы для основания "предельного" равнобедренного треугольника с вписанной окружностью единичного радиуса $r = 1$, **4** – точка перегиба, x_1, x_2, x_3 – корни, которые вместе с нулевой точкой образуют золотые сечения

В данных точках проведем касательные.

Каждая из касательных пересекает график функции ещё в одной точке.

Эти три точки (1, 2, 3) лежат на одной прямой! – Как говорится «мелочь, а приятно».

Но если приятно, то это уже не мелочь.

2) Кубическая парабола имеет центральную симметрию относительно точки перегиба. Начертим над графиком равносторонний треугольник и впишем в него окружность. Этот треугольник всегда можно повернуть и масштабировать так, чтобы его вершины оказались над точками пересечения графика функции с осью x – корнями полинома (x_1, x_2, x_3) .

Сторона z , угол поворота ψ равностороннего треугольника и диаметр d вписанной окружности определяются из равенства отношений

$$z = \frac{x_3 - x_1}{\cos \psi} = \frac{x_3 - x_2}{\cos(\psi + \pi/3)}.$$

В конкретном рассматриваемом случае они равны:

$$\psi = \arctg \frac{1}{\sqrt{15}} \approx 14,48^\circ; \quad z = \frac{\sqrt{40}}{\cos \psi} \approx 6,53; \quad d = \frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}p \approx 3,77.$$

То есть центр треугольника располагается в точности над точкой перегиба $x_4 = 1/3 \cdot p$, а вписанная окружность проецируется ровно на отрезок между экстремальными точками кубической параболы $x' = 0$, $x'' = 2/3 \cdot p$.

Остается добавить, что в нашем случае точки пересечения проецирующих линий с основанием треугольника также являются точками золотых сечений.

Подобные линии золотых сечений проводятся и на графиках полиномов четвертой степени [9, 10]. Но для пятой степени, увы.

Анализ формирования возможных линий золотого сечения на графике полиномов разного порядка позволяет высказать утверждение-гипотезу, что одна из причин неразрешимости общего алгебраического уравнения степени $n \geq 5$ в радикалах обусловлена проявлением свойств золотой пропорции. А именно невозможностью её формирования. Радикал $\sqrt{5}$, лежащий в основе константы золотого сечения, там просто "не приживается".

Вместо заключения.

Просматривая несложные математические выкладки, часто ловишь себя на мысли, что подобное уже где-то читал, видел и/или слышал. Это естественный удел простых решений.

Поэтому мы сознательно не акцентировали внимание на собственных находках (а они есть), которые могут де-факто таковыми и не оказаться.

Вполне допустимо на изъезженной дороге, – что называется, вдоль и поперек.

Многое зависит от ракурса или угла зрения. – Не можем видеть воду в звездах, но можем видеть звезды в луже воды.

Поэтому будем просто считать данную статью подборкой-концентрацией справочных сведений о замечательных экстремальных свойствах равнобедренного треугольника.

Никакой суеты за первенство. Тем более переживаний, если кто-то нашел раньше или сделает лучше. Только чувство сопричастности к общему делу. Радоваться, что ты не одинок в своих поисках, и данной тематикой интересуются другие исследователи.

Не ревнуй успевающему в пути своем...

Перестань гневаться и оставь ярость;

не ревнуй до того, чтобы делать зло,

ибо делающие зло истребятся... (Пс. 36:7–9).

Talis est vita. – Такова жизнь.

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
2. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2006. – 200 с.
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. 5-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МЦНМО. 2006. – 640 с.
4. Дроздов В.Б. Экстремальные геометрические задачи // Матем. обр. – 2008, вып. 3(47), 39–49.
5. Duance W., DeTemple. The triangle of smallest perimeter which circumscribes a semicircle // The Fibonacci Quarterly, Vol. 30, No. 3 (1992), p. 274.
6. Василенко С.Л. Золотые пирамиды и золотой конус Кеплера // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22494, 11.09.2016. – WR: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163048.htm.
7. Weisstein E.W. Philo Line. – From MathWorld – A Wolfram. WR: <https://mathworld.wolfram.com/PhiloLine.html>.
8. Conway J.H., Guy R.K. The Book Of Numbers. – New York: Springer-Verlag, 1996.
9. Василенко С.Л. Золотые пропорции полинома четвёртой степени (кварта-модель) // Науч.-техн. б-ка SciTecLibrary. – 17.12.2012. – WR: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12446.html.
10. Василенко С.Л. Модель золотой пропорции в алгебраических полиномах // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22398, 09.08.2016. – WR: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163022.htm.