С.Л. Василенко

"Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть первая.

Для треугольников, описанных вокруг полуокружности или окружности единичного радиуса, определены различные минимаксные оценки и параметры, приводящие к равнобедренному аналогу. В основе ряда экстремумов лежит константа золотого сечения.

В мире не происходит ничего, в чём бы не был виден
смысл какого-нибудь максимума или минимума.
Л. Эйлер

Общие сведения.

Константа золотого сечения Φ проявляется при самых неожиданных обстоятельствах.

Но каждое новое её присутствие-проявление вызывает неподдельное восхищение.

Эта незамысловатая математическая структура продолжает эффектно "выплывать" во всей своей красе в самых непредвиденных местах и приложениях, открывая новые горизонты в познании удивительного феномена.

Тематика золотой пропорции в геометрии ещё с древних времен традиционно связывается с построением равностороннего пятиугольника, а также изучением правильных многогранников (платоновых тел): икосаэдра и додекаэдра.

Но и плоский многоугольник с минимальным количеством сторон, а именно равнобедренный треугольник, достойно занимает своё место на золотоносной ниве.

И не только...

Достаточно сказать, что значение полупериметра равнобедренного треугольника с единичной высотой и основанием $h = a = 1$ равно константе золотого сечения $\Phi \approx 1{,}618$.

Углы при основании равны $\beta = \mathrm{arctg}\, 2 \approx 63{,}44^{\circ}$.

Уже в начале "Начал" Евклида [1, с. 13] формулируется классическое предложение (теорема) о равенстве углов, противолежащих боковым сторонам равнобедренного треугольника. Эта теорема пережила два тысячелетия. Переживет ещё не одно.

Она не привязана к пятому постулату, а значит, верна в абсолютной геометрии, включая геометрию Лобачевского, сферическую геометрию и т.п.

В отличие от многих других красивых фигур (круга, квадрата, прямоугольника, эллипса и др.), равносторонний треугольник имеет одну вертикальную ось симметрии, которая совпадает с биссектрисой, высотой и медианой из вершины к основанию.

Но это ему не мешает, скорее, помогает обрести многие специфические особенности.

Что особенного в равностороннем треугольнике? – Он единственный. В нём совпадают разные центры. Из всех треугольников с фиксированным периметром имеет наибольшую площадь. Собственно и всё! Более ничего занятного.

Неподвижно-застывшая правильность и скупая неживая красота...

Даже пирамиды не строили в виде тетраэдров.

В сущности, равносторонний треугольник – всего лишь частный случай и одна из разновидностей равнобедренного, которому соподчинен.

Погружение в тему.

Проводя аналогию с механическими системами, можно утверждать, что треугольник имеет три степени свободы – минимальное количество переменных, необходимых для полного и однозначного представления-описания конкретной фигуры. Один из параметров обязательно должен быть метрическим, так как трех углов недостаточно.

В состав остальных двух параметров может входить всё что угодно: углы, стороны, периметр, высоты, медианы, биссектрисы, площадь, радиусы вписанной или описанной окружностей и проч.

Особый случай относится к ситуации «tertium non datur», то есть «третьего не дано».

Тогда в роли третьего выступает не конкретный параметр, а некоторое условие, позволяющее в процессе поиска (решения задачи) однозначно идентифицировать геометрическую фигуру и/или её вид. В результате задаваемое начальное условие трансформируется в завершающий третий параметр треугольника.

Несмотря на кажущуюся простоту-примитивность треугольника, он аккумулирует в себе кладезь неожиданных и прелюбопытных закономерностей, которые значимы не только для геометрии, – ибо понять свойства глобальных объектов и явлений можно исследуя составляющие их элементы. Во всем их многообразии можно особо выделить класс задач, связанных с равнобедренными треугольниками.

Отличительные минимаксные свойства равнобедренных треугольников.

«Неиссякаемые россыпи драгоценных задач на максимум и минимум таятся в недрах древнейшей из математических наук – геометрии» [2, с. 32].

Приведем наиболее яркие минимаксные особенности равнобедренных треугольников.

Они разбросаны по разным литературным источникам, например [2–4], в виде теорем и задач. Имеют разные способы доказательства: геометрические, алгебраические и др. Часть из них включена в школьные программы.

Воспользуемся распространенным сочетанием обозначений вершин, сторон и углов произвольного треугольника (рис. 1-а), а также основных параметров:

h_a – высота, опущенная на сторону a;

S – площадь, p – полупериметр,

r, R – радиусы вписанной и описанной окружностей.

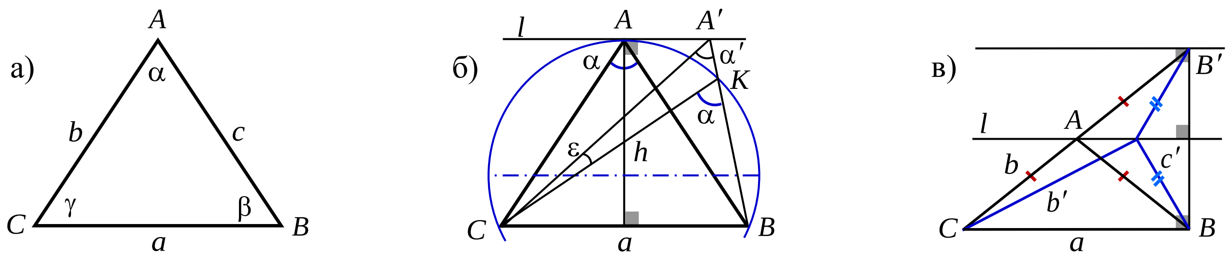
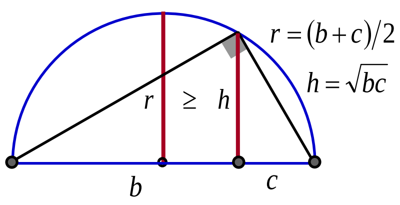


Рис.1. Обозначения и некоторые построения в треугольниках



Многие экстремальные свойства равнобедренных треугольников связаны с базовым неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел (отрезков) $(b+c)/2 \geq \sqrt{bc}$, где равенство достигается при $b = c$.

1. Среди всех треугольников с данным <u>основанием a и высотой h</u> наибольшую величину угла при вершине α имеет равнобедренный треугольник.

Пусть ABC – равнобедренный треугольник с фиксированными параметрами (a, h, α). Опишем вокруг него окружность с центром, расположенным на высоте h (рис. 1-б).

К этой окружности в точке A проведем касательную $l \parallel a$ и выберем любую точку A'.

Треугольник $A'BC$ имеет то же основание a и высоту h, и некоторый угол α'.

Точка A' лежит вне окружности, поэтому $A'B$ пересекает эту окружность в точке K. Тогда $\angle BKC = \alpha = \alpha' + \varepsilon > \alpha'$.

Таким образом, наибольший угол соответствует равнобедренному треугольнику:

$$\alpha_{\max} = 2 \cdot \operatorname{arctg}\,(a/2h).$$

В частности, при $a = h = 1$, полупериметр равен константе золотого сечения $p = \Phi$.

2. Среди всех треугольников с данным <u>основанием a и полупериметром p</u> наибольшую площадь S имеет равнобедренный треугольник.

По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Если a и p фиксированы, то сумма двух положительных чисел $(p - b) + (p - c) = a$ постоянна. Их произведение $(p - b)\cdot(p - c)$ максимально, когда они равны $p - b = p - c$, то есть боковые стороны одинаковы $b = c$.

Значит, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник:

$$S_{\max} = \sqrt{p(p-a)} \cdot a/2.$$

3. Среди всех треугольников с данным <u>основанием a и площадью S</u> наименьший полупериметр p имеет равнобедренный треугольник.

Сторона a и площадь S фиксированы, значит, фиксирована и высота $h = 2S/a$.

Геометрическое место точек A с одинаковой площадью S, – прямая $l \parallel a$, которая отстоит от основания на расстоянии $h = 2S/a$ (рис. 1-в).

Точка A, для которой периметр треугольника минимален, – точка пересечения прямых l и CB', где B' – точка, симметричная точке B относительно прямой l. Отрезок прямой короче всякой другой линии, соединяющей его концы: $b' + c' > b + c = 2b$, поэтому треугольник ABC – равнобедренный с минимальным полупериметром

$$p_{\min} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{2S}{a}\right)^2}.$$

4. Среди всех треугольников с данным <u>основанием a и углом α</u> наибольшие периметр и площадь имеет равнобедренный треугольник.

При неизменном значении a наибольший периметр достигается, если сумма $b + c$, а значит и её квадрат, принимают наибольшие значения.

По теореме косинусов $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cdot\cos\alpha$.

Тогда $(b + c)^2 = (b^2 + c^2) + 2bc = a^2 + 2bc\cdot(1 + \cos\alpha)$. То есть сумма $b + c$ варьирует только в зависимости от их произведения bc и становится максимальной при $b = c$.

В этом случае одновременно достигается и максимум площади:

$$S_{\max} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}; \qquad p_{\max} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha/2}\right).$$

5. Среди всех треугольников с фиксированным <u>углом при вершине α и площадью S</u> наименьшую длину основания a имеет равнобедренный треугольник.

По теореме косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc\cdot(1-\cos\alpha) = \| S = bc/2\cdot\sin\alpha \| =$$
$$= (b-c)^2 + 4S\cdot(1-\cos\alpha)/\sin\alpha = (b-c)^2 + 4S\cdot\operatorname{tg}(\alpha/2).$$

Второе слагаемое фиксировано, поэтому a минимально, если $b = c$; минимальна и сумма квадратов боковых сторон:

$$a_{\min} = 2\sqrt{S\cdot\operatorname{tg}(\alpha/2)}, \qquad \left(b^2 + c^2\right)_{\min} = 4S/\sin\alpha.$$

6. Среди всех треугольников с фиксированным углом при вершине α и полупериметром p наибольшую площадь S имеет равнобедренный треугольник.

Пусть вневписанная окружность S_a касается основания a и продолжения боковых сторон b и c в точках K и L. Длина отрезка касательной, проведенной к вневписанной окружности из противоположной вершины, равна полупериметру треугольника, то есть $AK = AL = p$, и вневписанная окружность S_a фиксирована.

Радиус вписанной окружности r максимален, когда она касается окружности S_a, то есть треугольник равнобедренный.

При этом площадь треугольника максимальна и равна $S_{\max} = \left(b^2 \sin\alpha\right)/2$. Сторону b выразим через полупериметр p и угол α из равенства $p = b + a/2 = b \cdot (1 + \sin\alpha/2)$, то есть

$$S_{\max} = \left(\frac{p}{1 + \sin\alpha/2}\right)^2 \frac{\sin\alpha}{2}.$$

7. Среди всех прямоугольных треугольников $\alpha = 90^{\circ}$ с заданной суммой катетов d максимальную площадь имеет равнобедренный треугольник.

Обозначим один из катетов через x, тогда второй равен $d - x$.

Площадь треугольника выражается функцией $S(x) = x\cdot(d - x)/2$.

Её производная $S' = (d - 2x)/2 = 0$ при $x = d/2$ и меняет свой знак с "+" на "–", то есть треугольник равнобедренный (катеты равны $b = d/2$) и имеет наибольшую площадь

$$S_{\max} = b^2/2.$$

8. Среди всех прямоугольных треугольников $(\alpha = 90^{\circ})$ с заданным основанием (гипотенузой) a наибольший радиус вписанной окружности r имеет равнобедренный треугольник [4, с. 40].

По теореме котангенсов $\operatorname{ctg}\alpha/2 = (p - a)/r = 1_{/\alpha = 90^{\circ}}$.

Радиус определяется через угол при основании:

$$r = p - a = (a + b + c)/2 - a = (b + c - a)/2 = (\sin\beta + \cos\beta - 1)\cdot a/2.$$

Производная по углу $r' = (\cos\beta - \sin\beta)\cdot a/2 = 0$, откуда находим $\beta = 45^{\circ}$ и

$$r_{\max} = a\cdot\left(\sqrt{2} - 1\right)/2.$$

К слову, величина $\left(\sqrt{2} - 1\right)/2 \approx 0{,}207$ – максимальное увеличение массы-энергии, которое частица может унести с нейтрально вращающейся (керровской) черной дыры посредством механизма Р. Пенроуза.

Для целостного восприятия рассмотренные утверждения на минимум и максимум сгруппируем в таблицу.

Таблица 1

Наиболее яркие минимаксные особенности равнобедренных треугольников

№ п/п	Фиксированные параметры		Экстремальные параметры
1	a	h	$\alpha_{\max}$
2	a	p	$S_{\max}$
3	a	S	$p_{\min}$
4	a	α	$p_{\max}$, $S_{\max}$
5	α	S	$a_{\min}$, $(b^2+c^2)_{\min}$
6	α	p	$S_{\max}$
7	$\alpha = 90^{\circ}$	$d = b+c$	$S_{\max}$
8	$\alpha = 90^{\circ}$	a	$r_{\max}$

Далее ограничимся рассмотрением равнобедренных треугольников. Их отличительная особенность – наличие вертикальной оси симметрии.

Основные параметры треугольника:

a – основание, b – боковая сторона, h – высота, опущенная на основание;
β – угол при основании, S – площадь, p – полупериметр, $p = b + a/2$.

Треугольник описан вокруг полуокружности.

В треугольник вписана полуокружность радиусом r так, что её диаметр совмещен с основанием (рис. 2-а). Без потери общности допустимо положить $r = 1$.

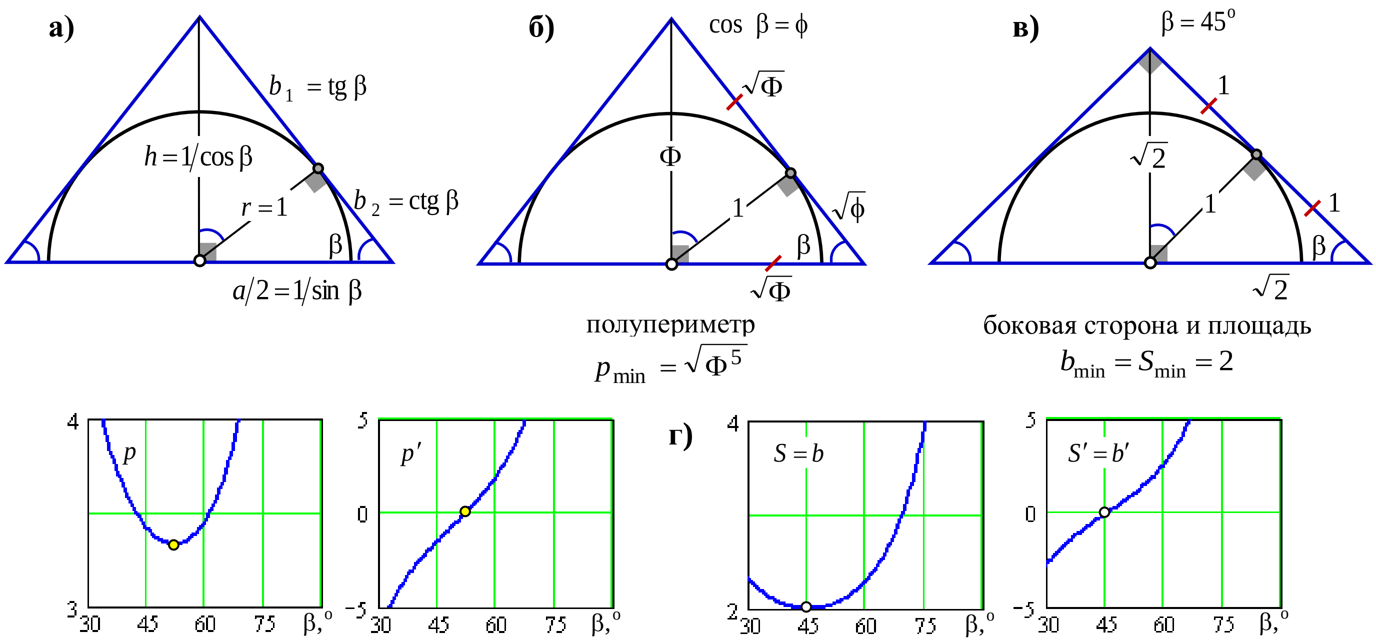


Рис. 2. Полуокружность $r = 1$ вписана в равнобедренный треугольник

Параметры треугольника можно описать непрерывными нелинейными функциями от угла β. По мере увеличения β, высота монотонно возрастает, основание уменьшается, а тройка переменных (b, p, S) имеет минимумы, в которых производные (b', p', S') равны нулю (рис. 2-г).

Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к боковой стороне и делит прямоугольный треугольник (половина исходного) на два других, подобных ему.

Нахождение экстремумов функций обычно выполняется путем приравнивания нулю производной, которая легче определяется для выражений в виде простых сумм: производная суммы равна сумме производных $(u + v)' = u' + v'$.

Поэтому немножко "сжульничаем": боковую сторону представим не целиком, а суммой двух отрезков $b = b_1 + b_2$, разделяемых точкой касания.

Полупериметр треугольника выражается нелинейной функцией от угла β

$$p = b_1 + b_2 + a/2 = \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\beta + 1/\sin\beta .$$

Производная функции равна

$$p' = \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1 - 2\cos^2\beta - \cos^3\beta}{\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta} = \left(1 - \cos\beta - \cos^2\beta\right)\cdot\frac{1 + \cos\beta}{\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta} .$$

Здесь применено классическое тождество $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$, а в кубическом трехчлене выделен квадратный трехчлен.

В пределах прямого угла величина $\cos\beta>0$, поэтому равенство $p'=0$ имеет единственное решение (рис. 2-б):

$$\cos^2\beta+\cos\beta-1=0\,,\qquad \cos\beta=\phi\,,$$

$$\underline{\beta=\arccos\ \phi\ \approx\ 51.83^{\circ}}:$$

$$b_1=\sqrt{\Phi},\quad b_2=\sqrt{\phi},\quad b=S=\sqrt{\Phi^3}\approx 2.058,\quad p_{\min}=\sqrt{\Phi^5}\approx 3.330,\quad h=\Phi,$$

где $\Phi=\left(\sqrt{5}+1\right)/2$, $\phi=\Phi^{-1}=\left(\sqrt{5}-1\right)/2$ – константы золотого сечения.

Минимум полупериметра не означает минимум всего остального. В частности, значение площади S не является экстремальным в данной конфигурации.

Для единичного радиуса площадь треугольника численно равна боковой стороне $S=2\cdot r\cdot b=b=\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}$, имеет производную $S'=\cos^{-2}\alpha-\sin^{-2}\alpha$ и минимальна $S_{\min}=2$, если $\cos\beta=\sin\beta$ или $\beta=45^{\circ}$, то есть для равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 2-в):

$$\underline{\beta=45^{\circ}}:$$

$$b_1=b_2=1,\quad b_{\min}=S_{\min}=2,\quad p=2+\sqrt{2}\approx 3.414,\quad h=\sqrt{2}\,.$$

Вернемся к первому "золотоносному" решению.

Исходный равнобедренный треугольник состоит из двух прямоугольных треугольников Кеплера с отношением сторон $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ или равнозначно $\phi:\sqrt{\phi}:1$.

Высоты, опущенные из прямых углов, в свою очередь образуют еще две пары Δ-Кеплера.

Адекватная формулировка: равнобедренный треугольник, описанный вокруг полуокружности единичного радиуса, имеет минимальный периметр, если его высота равна константе золотого сечения Φ.

С увеличением угла β быстро растут боковые стороны и высота, с уменьшением угла – растет основание, но в обоих случаях полупериметр треугольника больше $p_{\min}=\sqrt{\Phi^5}$.

Геометрическая интерпретация величины $\sqrt{\Phi}$ следует, если положить $d=2r=1$:

квадратный корень из константы золотого сечения $\sqrt{\Phi}$ – длина основания равнобедренного треугольника с наименьшим периметром, который описывает полуокружность единичного диаметра [5].

Треугольник описан вокруг окружности.

Обозначения параметров прежние. Без потери общности $r=1$.

На первый взгляд, задача эквивалентна предыдущей, достаточно изменить пропорционально стороны треугольника. Однако это не так.

Ранее центр и диаметр полуокружности были совмещены с основанием треугольника (рис. 2-а), теперь они находятся где-то внутри треугольника (рис. 3-а).

Не мудрствуя лукаво, обратимся к формулам. Математика подскажет.

Полупериметр и его производная зависят от угла наклона β:

$$p\ =\ b_1+b_2+a/2\ =\ \operatorname{tg}\beta+2\operatorname{ctg}(\beta/2);$$

$$p' = \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{1}{\sin^2(\beta/2)} = \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{2}{1-\cos\beta} = \frac{1-\cos\beta-2\cos^2\beta}{\cos^2\beta\cdot(1-\cos\beta)}.$$

Приравниваем числитель производной p' нулю $2\cos^2\beta+\cos\beta-1=0$, из квадратного уравнения получаем: $\cos\beta=0{,}5 \;\Rightarrow\; \beta=60^{\circ}$.

Аналогичным образом ведет себя и площадь треугольника, равная $S=p{\cdot}r$.

$$\underline{\beta=60^{\circ}}:$$

$$b_1=b_2=\sqrt{3},\quad b=2\sqrt{3}\approx 3.464,\quad p_{\min}=S_{\min}=3\sqrt{3}\approx 5.196,\quad h=3.$$

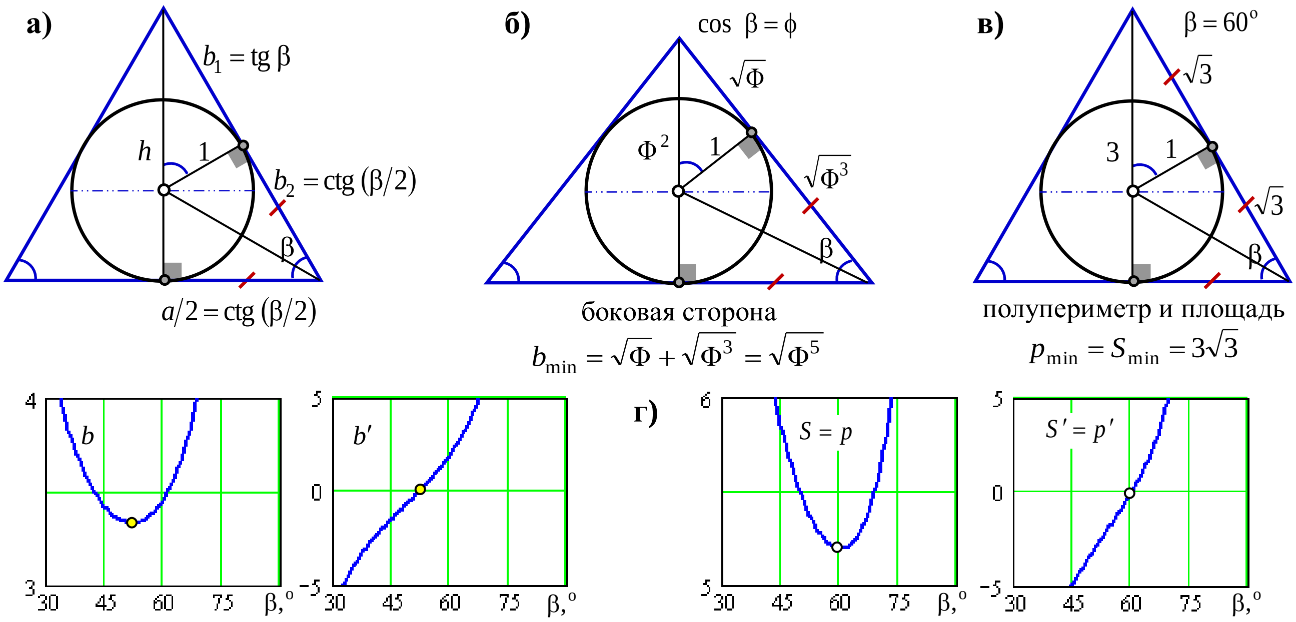


Рис. 3. Окружность $r=1$ вписана в равнобедренный треугольник

Таким образом, периметр и площадь треугольника, описанного вокруг единичной окружности, имеют минимальные значения, если треугольник равносторонний.

А вот боковая сторона треугольника имеет иные экстремальные свойства, аналогично длине апофемы правильной пирамиды, описанной вокруг шара, относительно угла наклона боковых граней [6].

Длина боковой стороны и её производная также зависят от угла наклона β:

$$b = b_1+b_2 = \mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{ctg}(\beta/2);$$

$$b = \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{1}{2\cdot\sin^2(\beta/2)} = \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{1}{1-\cos\beta} = \frac{1-\cos\beta-\cos^2\beta}{\cos^2\beta\cdot(1-\cos\beta)}.$$

Минимум b достигается в точке $b'=0$:

$$\underline{\cos b=\phi,\ \ \mathrm{tg}\,\beta=\sqrt{\Phi}};$$

$$b_1=\sqrt{\Phi},\quad b_1=\sqrt{\Phi^3},\quad b_{\min}=\sqrt{\Phi^5}\approx 3.330,\quad p=S=\sqrt{\Phi^7}\approx 5.388,\quad h=\Phi^2.$$

Сравнительный анализ.

Сравним условия образования минимальных значений боковых сторон равнобедренного треугольника, описанного вокруг полуокружности и окружности:

Математические характеристики	Равнобедренный треугольник описан вокруг:	
	полуокружности	окружности
Равенство производной нулю	$\cos^2\beta+\cos\beta-1=0$	$2\cos^2\beta+\cos\beta-1=0$
Замена переменной	$x=1/\cos\beta$	$x=1/\cos\beta$
Характеристическое уравнение	$x^2=x+1$	$x^2=x+2$
Возвратное уравнение	$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$	$f_{n+1}=f_n+2f_{n-1}$
Отношение соседних членов	$\lim\limits_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n=\Phi=\phi^{-1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n=2$
Угол в основании треугольника	$\beta=\arccos\phi\ \approx\ 51.83^{\circ}$	$\beta=\arccos\ 1/2=\pi/3=60^{\circ}$

Двучленно-аддитивную рекурсию (возвратное, разностное уравнение) $f_{n+1}=s\cdot f_n+q\cdot f_{n-1}$ можно интерпретировать в метафорической терминологии:

$n+1$	n	$n-1$
завтра будущее	сегодня настоящее	вчера прошлое

− одинаковый вес настоящего и прошлого $s = q = 1$ ориентирует будущее на золотое сечение;
− удвоенный вес прошлого по сравнению с настоящим $q = 2s$ дает удвоение будущего;
− но уже утроенный вес прошлого $q = 3s$ дает только $\left(1+\sqrt{13}\right)/2\approx 2{,}3$ и так далее.

Будущее ещё не произошло, но считается следствием прошедшего и настоящего.

To be continued…

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
2. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2006. – 200 с.
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. 5-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МЦНМО. 2006. – 640 с.
4. Дроздов В.Б. Экстремальные геометрические задачи // Матем. обр. – 2008, вып. 3(47), 39–49.
5. Duance W., DeTemple. The triangle of smallest perimeter which circumscribes a semicircle // The Fibonacci Quarterly, Vol. 30, No. 3 (1992), p. 274.
6. Василенко С.Л. Золотые пирамиды и золотой конус Кеплера // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22494, 11.09.2016. – WR: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163048.htm.
7. Weisstein E.W. Philo Line. – From MathWorld – A Wolfram. WR: https://mathworld.wolfram.com/PhiloLine.html.
8. Conway J.H., Guy R.K. The Book Of Numbers. – New York: Springer-Verlag, 1996.

Украина, Харьков