Л.Е. Чулков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ "ОБРЕЗАНИЕ"

“Ученики Его /Иисуса Христа/ сказали Ему:
Обрезание полезно или нет? Он сказал им:
Если бы оно было полезно, их Отец зачал бы их /иудеев/
в их матери обрезанными. Но истинное обрезание в духе
обнаружило полную пользу”.
Апокрифическое Евангелие от Дидима Иуды Фомы

В хрестоматийном справочнике по математике [1], который рекомендован Главным управлением общего среднего образования Министерства образования РФ, на стр. 45 черным по белому утверждается: "Нецелая степень отрицательного числа не имеет смысла". Это при том, что несколькими строчками выше сказано: "...Если же n – нечетное число, то существует одно и только одно действительное число X, такое, что X^n = a (a < 0). Это число обозначают $^n\sqrt{a}$ и называют корнем нечетной степени n из отрицательного числа а." И далее даны 2 примера:

1) $^3\sqrt{-8} = -2$...; 2) $^5\sqrt{-243} = -3$.

Но разве два выражения $^3\sqrt{-8}$ и $(-8)^{1/3}$ не являются аутентичными в том смысле, что «одно является иной равносильной формой алгебраического представления другого»? Другими словами, математически безупречным является тождество: $(-8)^{1/3} \equiv {}^3\sqrt{-8} \equiv -2$, в котором первый элемент $(-8)^{1/3}$, по утверждению авторов [1], якобы "... не имеет смысла".

Все сказанное в равной мере относится и к тождеству:
$(-243)^{1/5} \equiv {}^5\sqrt{-243} \equiv -3$.

Нет надобности доказывать банальную истину, что подобных тождеств, элементами которых являются нецелые степени отрицательных чисел, существует бесконечно большое множество. Но характерная особенность неисчислимого множества $M(x) = (-a)^x$ /где $0 < x < 1$, a – все числа "натурального ряда"/ заключается в том, что это множество является дискретным. Эта особенность означает, что представить его графически в виде непрерывной функции y = f(x) невозможно. Иначе говоря, функция $M(x) = (-a)^x$ при любом фиксированном а будет являть собой закономерное /не хаотичное/ распределение отдельных точек на координатной плоскости с ординатой М и абсциссой Х. А это в свою очередь означает, что применить к такой "квантованной" функции дифференциальное и интегральное исчисление /в полном соответствии с его требованиями/ невозможно. Такова вторая принципиальная особенность множества $M(x) = (-a)^x$, вытекающая из первой.

Однако при этом каждая действительная точка множества M(x), вопреки утверждению авторов [1], имеет смысл, поскольку выражается единственным реальным числом, лежащим на классической числовой оси.

Третья особенность множества $M(x) = (-a)^x$, $0 < x < 1$ состоит в том, что в это неограниченное множество входит подмножество "чисел” типа $M(n) = {}^n\sqrt{-a} = (-a)^{1/n}$, где n – все целые четные числа. Из этого следует, что "числа" $\sqrt{-1} = (-1)^{1/2}$, $(-1)^{1/4}$и т.д.; $\sqrt{-2} = (-2)^{1/2}$, $(-2)^{1/4}$ и т.д. тоже формируют дискретное множество. Но принципиальное, "кричащее" отличие подмножества M(n) от вобравшего его в себя множества M(x) состоит в том, что составляющие его точки, все без исключения,, не имеют места на координатной плоскости У Х, у которой обе оси координат вещественны. И в этом смысле точки подмножества $M(n) = (-a)^{1/n}$ в самом деле бессмысленны – им нет места на классической числовой оси.

Впервые это поняли средневековые алгебраисты, когда пытались найти корни "уравнений" второй, третьей и четвертей степени $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, в которых левая часть ни при каких величинах x $(- \infty \le x \le \infty)$ не обращается в ноль. А это, естественно, означало, что ставить знак "=" между левой и правой /нулевой/ частями предполагаемого "уравнения" недопустимо, т.е. такие нелегитимные "уравнения" не имеют реальных корней.

Столкнувшись с таким математическим "казусом", средневековые алгебраисты /Ферро (1456-1526) , Тарталья (1499-1557) , Феррари (1522-1565) , Кардано, Бомбелли и др./ сперва робко, потом все решительнее стали вводить в практику решения алгебраических нелегитимных "уравнений" не вполне понятные для самих новаторов "мнимые" числа, базовой основой которых было "число" $i = \sqrt{-1}$. Затем перешли к так называемым "комплексным" числам.

Но получаемые при этом "мнимые" и "комплексные" корни были непонятны для людей, занимавшихся практическими делами, результаты которых и входные параметры требовали количественной оценки реальными числами /целыми, дробными, смешанными, но никак не "мнимыми"/.

Более того, когда Исаак Ньютон (1643-1727) и Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) построили фундаментальное "здание" дифференциального и интегрального исчисления во всем его великолепии, стало ясно, что все эти алгебраические и геометрические "мнимости" никоим образом не вписываются в архитектуру эпохального "здания".

Однако гениальный Леонард Эйлер (1707-1783), окрыленный своими общепризнанными достижениями в различных разделах математики, решил, что абсолютно безупречный математический шедевр Ньютона-Лейбница может быть несколько достроен "ввысь и вширь" с использованием "строительного материала" на основе "мнимостей".

Обуреваемый этими мыслями, Эйлер в конце концов весьма искусственно завязал "мнимости" с тригонометрией и числом е /основание натурального логарифма/ посредством своей отнюдь не безупречной формулы

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Тем самым в замену декартовой координатной плоскости У Х с действительными осями У и Х была предложена новая, нелепая плоскость с мнимой осью ординат iУ и действительной осью Х. Это, как бы, позволяло в отдельных случаях использовать в "теории функций комплексного переменного" дифференциальное исчисление, <u>безупречно работающее только в теории функций действительного переменного</u>.

Непререкаемый авторитет Эйлера в математике способствовал тому, что следом за ним Коши, Гаусс, Риман и ряд других видных математиков всячески старались втиснуть "мнимости" в свои исследования в части фундаментальной /"чистой"/ математики, а иногда даже в сугубо прикладной математике.

Так на протяжении нескольких столетий формировалась "теория функций комплексного переменного" /ТФКП/ с различными ее ответвлениями. При этом как непосредственные творцы ТФКП, так и ее приверженцы-прикладники старались закрывать глаза на вопиющие противоречия между ТФКП и исконно классической математикой, базировавшейся только на действительных числах и соответствующих аксиоматических правилах. ТФКП, например, игнорирует тот факт, что е =2,71828... в какой угодно степени не может стать -1; или утверждает, что $^3\sqrt{1}$ имеет три различных корня. Зачастую "мнимологи", видя, что очевидные, азбучные математические понятия и теоремы их загоняют в тупик, выходят из положения простым отрицанием этих правил и теорем. Так они вынуждены были отринуть понятия «больше» и «меньше» / > и < / для "комплексных чисел", хотя такими понятиями издревле пользовались и пользуются сейчас все люди, независимо от их осведомленности в арифметике.

Справедливости ради следует сказать, что немногим прикладникам /Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин, М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев/ в процессе многолетних, утомительных и трудоемких манипуляций с "мнимостями” в конце концов удавалось получать практические рекомендации, в которых "мнимости" путем сложнейших "кульбитов” превращались в реальные числа. Жизнь однако показывала, что до внедрения этих теоретических рекомендаций в конкретные, материализованные дела требовались еще долгие годы дополнительных экспериментальных поисков и практических доработок.

Такова неизбежная цена сомнительного научного пути, ведущего от того, что "мнится”, к тому, что, благодаря счастливой случайности изредка становилось осязаемым и визуализируемым.

Что касается большого отряда остальных математиков-"мнимологов" /за вычетом единиц – триумфаторов/, то они, в лучшем случае, вносили свою скромную лепту в и без того непомерно разбухшую ”чистую” ТФКП, горделиво отмежевавшуюся от практики.

Вместе с тем еще родоначальник прямоугольной системы координат и основ аналитической геометрии Рене Декарт (1596-1650) в свое время доказал замечательную теорему: “Число положительных корней любого алгебраического уравнения степени n равно /или на четное числе меньше/ числу перемен знаков в ряду коэффициентов a_0, a_1, ..., a_n уравнения".

В дополнение к этому Декарт указывает, каким алгебраическим приемом можно определить число отрицательных корней у полинома n.

Таким образом, Декарт совершенно обоснованно отрицал мнимые и комплексные корни при решении алгебраических уравнений, понимая, что все эти "мнимости" и "комплексности" неминуемо вступают в противоречие с реальной человеческой практикой и результатами математической обработки экспериментальных данных.

Первый и, пожалуй, единственный из наших соотечественников /будучи математиком по базовому образованию/ Павел Флоренский (1882-1943) в своем труде "Мнимости в геометрии" /изд. «Поморье», М., 1922 год/ подверг сокрушительной критике ТФКП и пытался найти "перекидной мостик" от "теории мнимостей" к теории действительных чисел.

На основе математических трудов Рене Декарта и Павла Флоренского мне в результате 20-ти летней упорной работы удалось разработать методические приемы обращения любых нелегитимных алгебраических уравнений во вполне правомерные уравнения, дающие вещественные корни без ущерба для исходных экспериментальных параметров, формирующих исходные уравнения.

Краткий критический анализ ТФКП представлен в моей брошюре "Числа-анархисты" [2]. Подробное изложение моих многолетних исследований в этом направлении с полученными аналитическими и практическими результатами, иллюстрированное конкретными примерами, дано в моей книге [3], в главе "Трагедия мнимых и комплексных чисел".

Конспективно эта тема освещена в моей статье "Рене Декарт и Павел Флоренский – разоблачители математических мнимостей", М., 2017 г. Интернет, сайт «Академия Тринитаризма».

С представленным в начале данной статьи казуистическим остракизмом – якобы "нецелая степень отрицательного числа бессмысленна", напрямую связан другой казуистический остракизм [4, с. 233]: "Числа а /основание логарифма/ и N /число под знаком логарифма/ можно брать целыми и дробными, но непременно положительными, если мы хотим, чтобы логарифмы были действительными числами”.

Учитывая, что показательная и логарифмическая функции являются взаимо-обратимыми, представим предыдущие примеры 1) и 2) в виде следующих логарифмов:

1а) $\log_{-8}(-2) = 1/3$, 1б) $\log_{-8}(-2)^{-1} = -1/3$, 1в) $\log_{-2}(-8) = 3$, 1г) $\log_{-2}(-8)^{-1} = -3$.

2а) $\log_{-243}(-3) = 1/5$, 2б) $\log_{-243}(-3)^{-1} = -1/5$, 2в) $\log_{-3}(-243) = 5$, 2г) $\log_{-3}(-243)^{-1} = -5$.

Как видим, для логарифмов требование $a > 0$ и $N > 0$ из опасения, чтобы логарифмы не стали "мнимыми числами", мягко говоря, является излишне зауженным, а грубо говоря – математически "обрезанным".

Опять-таки можно привести сколько угодно примеров, когда логарифм отрицательного числа N при отрицательном основании a – суть ни только не "мнимое", но даже целое число, как в примерах 1в), 1г), 2в), 2г). Но для того, чтобы подобные примеры, в которых $|N| > |a|$ были безупречными, необходимо соблюдать такое соотношение между -a и -N, чтобы соответствующий логарифм был нечетным целым числом.

Аналогично для примеров вида 1а), 1б), 2а), 2б), в которых всегда $|a| > |N|$, необходимо соблюдать такое соотношение между -a и -N, чтобы соответствующий логарифм был дробью 1/n, где n – всегда нечетное целое число.

Таким образом, была показана очевидная "обрезающая” казуистичность требования $a > 0$ и $N > 0$ для логарифмов, вызванная все той же расплатой абстрактной фундаментальной математики за старинный грех ее "блудодействий" с "мнимыми" и "комплексными числами", что не может не отражаться на результатах решения конкретных прикладных задач в различных областях человеческой практики.

Можно привести также многочисленные примеры, дающие неоспоримо верные результаты при нарушении только одного "обрезающего требования" $a > 0$ для логарифмов.

Например: $\log_{-8}(4) = 2/3$; $\log_{-27}(9) = 2/3$, откуда следуют так же вполне законные, хотя и "запрещенные" результаты

$(-8)^{2/3} \equiv \sqrt[3]{-8^2} \equiv 4$; $(-27)^{2/3} \equiv \sqrt[3]{-27^2} \equiv 9$.

Общее уравнение, на основе которого получены частные решения 1а), 1б), 1в), 1г) разрешимо в радикалах, дающих четыре различных корня /в нашем примере $1/3 \neq -1/3 \neq 3 \neq -3$ /, следовательно его "группа” является "полициклической матрешкой” [5], т.е. полностью удовлетворяет критерию Галуа.

Другой аналогичный частный пример этого общего уравнения, удовлетворяющего критерию Галуа, являют собой наши логарифмы 2а) ≠ 2б) ≠ 2в) ≠ 2г).

Таким образом, узаконенное математическое "обрезание" [1, с. 45], [4, с. 233] фактически коснулось общепринятого критерия Галуа. Получается, что печальной участи юноша Эварист Галуа (1811-1832) не только при жизни подвергался остракизму со стороны обожаемых им столпов математики /Коши, Лакруа, Пуассон, Якоби, Гаусс/, но и по прошествии 200 лет его, как бы невзначай, вычеркнули из списка творцов математики. Быть может, Галуа сам уготовил себе такой злой рок тем, что увлекшись в свое время "мнимостями", с высокомерием Эйлера, Коши, Гаусса чванливо-небрежно отнесся к оригинальным математическим трудам Рене Декарта.

С другой стороны, проведенный анализ показал, что теория групп Галуа лишь частично вобрала в себя "мнимости”, а в целом далеко перешагнула [6] за рамки, очерченные пресловутой алгебраической "мнимостью".

Л и т е р а т у р а

1. В.А. Гусев, А.Г. Мордкович "Справочник по математике", «Просвещение», М., 1995

2. Л.Е. Чулков "Числа-анархисты" «ВСЕМИРНЫЙ ФОНД ПЛАНЕТЫ ЗЕМЛЯ», М., 2004

3. Л.Е. Чулков "Философские начала натуральной математики", М., 2017

4. М.Я. Выгодский "Справочник по элементарной математике", «ФМ», М., 1962

5. А. Дальма "Эварист Галуа революционер и математик" перевод с франц., М., «НАУКА», «ФМ», 1984

6. М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков "Основы теории групп", М., «НАУКА», 1972.